

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Dottorato di ricerca in:

MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE (ING-IND/13)

Ciclo XXII

**MODELLAZIONE DINAMICA DI STRUTTURE E  
COMPONENTI DI MACCHINE IN PARETE SOTTILE  
MEDIANTE FUNZIONI SPLINE NON CONVENZIONALI**

**Tesi di Dottorato di:**  
Ing. Antonio Carminelli

**Coordinatore:**  
Prof. Vincenzo Parenti Castelli

**Tutore:**  
Prof. Giuseppe Catania

INTRODUZIONE.....	4
Capitolo 1 ELEMENTO FINITO SHELL B-SPLINE .....	7
1.1 SUPERFICI B-spline: definizioni utilizzate.....	7
1.2 Definizione della geometria dell'elemento finito a doppia curvatura.....	10
1.3 Definizione delle equazioni per l'elemento finito guscio di Mindlin .....	13
1.3.1 Campo di spostamento .....	13
1.3.2 Equazioni cinematiche (legame deformazioni-spostamenti) .....	15
1.3.3 Equazioni costitutive e trasformazioni di coordinate .....	16
1.3.4 Equazioni del moto .....	18
1.4 Integrazione numerica .....	22
1.5 Variazione dei parametri di discretizzazione del campo di spostamento.....	24
1.6 Risultati numerici .....	26
1.6.1. Piastra quadrata incastrata.....	26
1.6.2 Guscio cilindrico incastrato.....	29
1.6.3. Guscio sferico incastrato .....	31
Capitolo 2 MODELLAZIONE DI COMPONENTI CON FORME LIBERE .....	34
2.1 Introduzione .....	34
2.2 Funzioni PB-spline .....	37
2.3 Utilizzo delle PB-spline come funzioni di forma per elemento finito.....	38
2.4 Elemento finito shell ibrido .....	39
2.5 Collegamento di patch B-spline e integrazione numerica .....	42
Capitolo 3 MODELLAZIONE DI EFFETTI LOCALI .....	44
3.1 Introduzione .....	44
3.2 Aumento locale dei gradi di libertà nell'elemento ibrido.....	45
3.3 Integrazione numerica .....	45
3.4 Risultati numerici .....	47
3.4.1 Piastra quadrata con foro sottoposta ad un carico di trazione monoassiale. ....	47

3.4.2 Piastra rettangolare incastrata con foro sottoposta ad un carico trasversale. ....	51
3.4.3 Vibrazioni libere di una piastra con geometria romboidale. ....	54
Capitolo 4 ELEMENTO FINITO SHELL PER COMPONENTI IN MATERIALE COMPOSITO LAMINATO.....	58
4.1 Introduzione .....	58
4.2 Equazioni costitutive per il laminato .....	59
4.3 Risultati numerici .....	60
4.3.1 Piastra quadrata in laminato angle-ply.....	60
4.3.2 Confronto con dati sperimentali .....	63
CONCLUSIONI .....	66
BIBLIOGRAFIA .....	68

## INTRODUZIONE

Nella tesi è stato considerato l'utilizzo di funzioni spline come base per lo studio, tramite il metodo degli elementi finiti, delle vibrazioni libere e forzate di componenti in parete sottile con geometria qualsiasi in materiale composito laminato.

Alla luce dell'importanza, comunemente accettata in letteratura, dell'effetto della deformazione di taglio trasverso nella modellazione di componenti in materiale composito laminato, è stato considerato un elemento guscio basato sulla teoria di Reissner-Mindlin con 5 gradi di libertà (gdl) generalizzati per nodo. È noto che tale tipologia di formulazione tende a presentare fenomeni di irrigidimento numerico (*locking*). Un metodo generalmente utilizzato per limitare l'effetto del locking è dato dall'utilizzo di regole di integrazione numerica di basso ordine. Tale metodo può, tuttavia, portare ad una matrice di rigidezza di rango errato. Per tali motivi è stata effettuato uno studio numerico per verificare l'incidenza del locking e la sua dipendenza dall'ordine di quadratura. Inoltre, è stata anche investigata l'incidenza del numero e del grado delle funzioni di forma utilizzate. Dopo aver definito le equazioni che esprimono la geometria ed il campo di spostamento per un generico elemento finito tramite funzioni B-spline, sono state derivate le equazioni del moto per un generico componente in materiale isotropo la cui geometria fosse mappabile su un singolo dominio parametrico rettangolare semplicemente connesso (patch). La definizione della geometria e del campo di spostamento dell'elemento guscio ha richiesto l'utilizzo di un processo di interpolazione delle normali alla superficie media a causa del carattere generalmente non interpolatorio delle B-spline. Tale processo è stato anche utilizzato per definire dei metodi di diminuzione dell'errore di approssimazione della soluzione aumentando sia il numero che il grado delle funzioni B-spline utilizzate. Le equazioni e gli algoritmi sviluppati sono stati implementati in ambiente Matlab. Le prove numeriche effettuate hanno mostrato che l'effetto del *locking* diminuisce utilizzando regole di quadratura di ordine basso, ed anche che il rango della matrice di rigidezza è inferiore a quello atteso quando la patch B-spline si riduce ad una patch di Bezier. Inoltre l'utilizzo di funzioni di grado elevato permette una diminuzione dell'irrigidimento numerico dovuto al locking.

Al fine di poter studiare componenti di macchine aventi geometria qualsiasi (forme non mappabili su un dominio rettangolare, presenza di fori, ecc), è stata prevista la possibilità di assemblaggio di più patch di tipo B-spline. Per mantenere la continuità del campo di spostamento è stata adottata la medesima tecnica comunemente utilizzata nella teoria classica

degli elementi finiti. Tuttavia, a causa della rappresentazione tensoriale delle patch B-spline, l'assemblaggio lungo un bordo comune a due diverse patch, per mezzo della composizione dei rispettivi gdl, implica un grande aumento di questi ultimi. Un simile problema si riscontra allorché sia necessario descrivere comportamenti (modellabili mediante il gradiente del campo di spostamento) che richiedano un aumento localizzato dei gdl. Per superare tali limitazioni è stato preso in considerazione l'utilizzo di altre tipologie di funzioni su base spline.

Sono state proposte ed implementate funzioni di tipo Point-Based-spline (PB-spline), una generalizzazione delle funzioni B-spline in cui una superficie non è più ottenuta come prodotto tensoriale di curve monovariate, permettendo così una grande flessibilità nella distribuzione delle funzioni di forma all'interno del dominio parametrico. Tuttavia l'utilizzo delle PB-spline ha posto dei problemi sia per l'utilizzo di regole di integrazione numerica efficienti come quelle di Gauss, sia per la definizione di una procedura che permettesse di aumentare il numero di funzioni di forma mantenendo inalterata la geometria del componente in studio (raffinamento). Tali problemi sono stati risolti mediante l'imposizione di vincoli alla distribuzione delle funzioni di forma PB-spline. Ciò ha condotto ad una struttura ibrida in cui, grazie alla generalizzazione introdotta con le PB-spline, una patch di funzioni B-spline può sia ammettere una diversa parametrizzazione sui bordi (in modo che due patch possano essere assemblate lungo un bordo comune senza aumento di gdl), sia avere un'altra patch tensoriale sovrapposta spazialmente (al fine di aumentare localmente i gdl). È stato così possibile, partendo dai vettori dei nodi che definiscono la patch, definire una procedura per identificare univocamente tre tipologie di sotto-domini su cui poter applicare una ben determinata tecnica di integrazione numerica dipendente, essenzialmente, solo dal grado delle funzioni di forma utilizzate. Con tale approccio ibrido, inoltre, il problema della mancanza di un algoritmo di raffinamento è stato aggirato per mezzo di una tecnica simile a quella utilizzata per l'interpolazione delle normali alla superficie media dell'elemento guscio. Ciò ha permesso di ottenere un'approssimazione della geometria affidabile con un minimo onere computazionale aggiuntivo. L'approccio è stato testato effettuando delle simulazioni numeriche di alcuni problemi, quali analisi statica e simulazione delle vibrazioni libere, le cui soluzioni sono state comparate con quelle presenti in letteratura oppure con quelle ottenute tramite simulazioni effettuate con software commerciali ad elementi finiti.

Successivamente la formulazione è stata estesa alla modellazione di componenti in materiale anisotropo, con particolare riguardo ai compositi laminati con numero di strati e sequenza di laminazione qualsiasi. È stata utilizzata una teoria a *singolo strato equivalente*, in

luogo di una teoria *multistrato*, poiché dallo studio della letteratura disponibile è emersa l'efficacia di tale teoria nella determinazione della risposta globale di un sistema (deformazioni approssimate, carico critico di buckling, frequenze naturali e modi propri di vibrare associati, eccetera). L'approccio è stato verificato sia tramite simulazioni numeriche, i cui risultati di riferimento sono disponibili in letteratura, sia comparando le FRF sintetizzate numericamente con quelle ottenute da prove sperimentali su provini tubolari in materiale composito con fibra di carbonio e matrice polimerica. Tali verifiche hanno confermato che l'approccio proposto permette una buona velocità di convergenza verso la soluzione dei problemi utilizzati come riferimento anche per materiali compositi laminati, mantenendo la capacità, caratteristica del metodo degli elementi finiti, di trattare problemi con geometrie, condizioni al contorno e azioni esterne qualsiasi.

# Capitolo 1 ELEMENTO FINITO SHELL B-SPLINE

## 1.1 SUPERFICI B-spline: definizioni utilizzate

Di seguito verranno brevemente introdotte le curve e superfici B-spline al solo scopo di definire le grandezze che verranno utilizzate nel seguito, poiché si tratta di strumenti comunemente utilizzati come base per la rappresentazione geometrica di curve e superfici e la letteratura al riguardo è vasta [1-4].

Una curva B-spline di grado  $p$  è una curva parametrica che può essere espressa come:

$$\mathbf{c}(\xi) = \sum_{i=1}^m N_i^p(\xi) \mathbf{P}_i \quad (1.1)$$

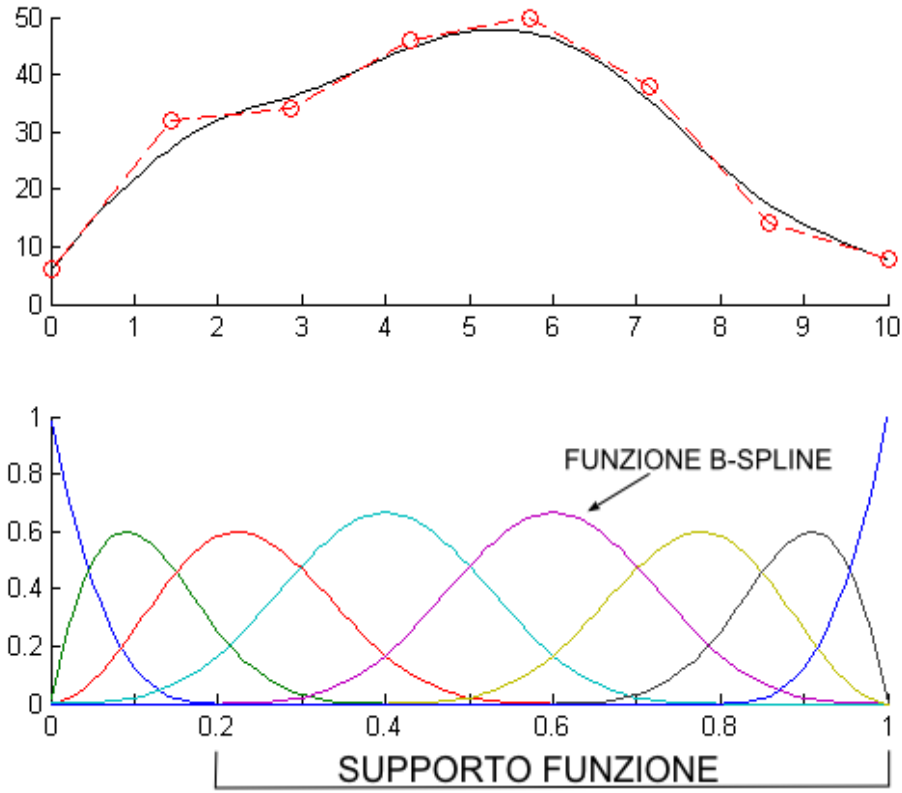
dove  $\mathbf{C}$  è un punto della curva,  $\xi$  è la variabile parametrica per la quale, senza limitare la trattazione, si può considerare  $\xi \in [0,1]$  e  $\{\mathbf{P}_i, i=1, \dots, m\}$  è l'insieme dei punti di controllo (pdc) che forma il poligono di controllo.  $\{N_i^p, i=1, \dots, m\}$  è l'insieme delle funzioni di base B-spline univocamente definite dal grado  $p$  e dal vettore dei nodi  $\mathbf{H} = \{h_1, \dots, h_{m+p+1}\}$ , in cui  $h_{i-1} \leq h_i \leq h_{i+1}$ . Il generico elemento  $h_i$  è detto knot. Matematicamente, quindi, la curva è una mappa  $\mathbf{c}: [0,1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , dove  $d=3$  è la dimensione dello spazio Euclideo dei suoi punti di controllo.

Le funzioni di miscelamento possono essere calcolate tramite la formula ricorsiva di Cox-De Boor [2]:

$$N_i^p(\xi) = (\xi - h_i) \frac{N_i^{p-1}(\xi)}{h_{i+p} - h_i} + (h_{i+p+1} - \xi) \frac{N_{i+1}^{p-1}(\xi)}{h_{i+p+1} - h_{i+1}} \quad (1.2)$$

dove

$$N_i^0 = \begin{cases} 1 & \text{se } h_i \leq \xi < h_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.3)$$



**Figura 1.1:** Curva B-spline descritta da otto punti di controllo (sopra) e funzioni di miscelamento cubiche (sotto).

Ogni funzione di miscelamento  $N_i^p$  è definita sull'intero dominio  $[0,1]$  ma è nulla se valutata fuori dal suo *intervallo di supporto*  $[h_i, h_{i+p+1}]$ .

Una superficie B-spline è una superficie parametrica  $\mathbf{r}: [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  (*patch*) che può essere ottenuta come prodotto tensoriale di curve B-spline a valori in  $\mathbb{R}^3$  e la cui espressione è:

$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \mathbf{P}_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n B_{ij}^{pq}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{ij} \quad (1.4)$$



Dove  $\{\mathbf{P}_{ij}, i=1, \dots, m; j=1, \dots, n\}$  è l'insieme dei punti di controllo che definisce il *poliedro di controllo*. Il prodotto tensoriale delle funzioni di base B-spline è univocamente definite dai gradi  $p$  e  $q$  e dai vettori dei nodi  $\mathbf{H}=\{h_1, \dots, h_{m+p+1}\}$  e  $\mathbf{G}=\{g_1, \dots, g_{n+q+1}\}$ . Ogni funzione biviariata  $B_{ij}^{pq}$  è nulla se valutata fuori dalla sua *cella di supporto*  $[h_i, h_{i+p+1}] \times [g_j, g_{j+q+1}]$ . Nel seguito si prenderanno in considerazione superfici in cui il vettore dei nodi  $\mathbf{H}$  (rispettivamente  $\mathbf{G}$ ) ha i primi  $p+1$  ( $q+1$ ) elementi uguali a 0 e gli ultimi  $p+1$  ( $q+1$ ) uguali a 1, ovvero superfici che interpolano i quattro vertici del *poliedro di controllo*. In definitiva una superficie B-spline è univocamente definita da:

- Valori degli  $m \times n$  punti di controllo
- Grado  $p$  e  $q$  delle funzioni B-spline
- Vettori dei nodi  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$

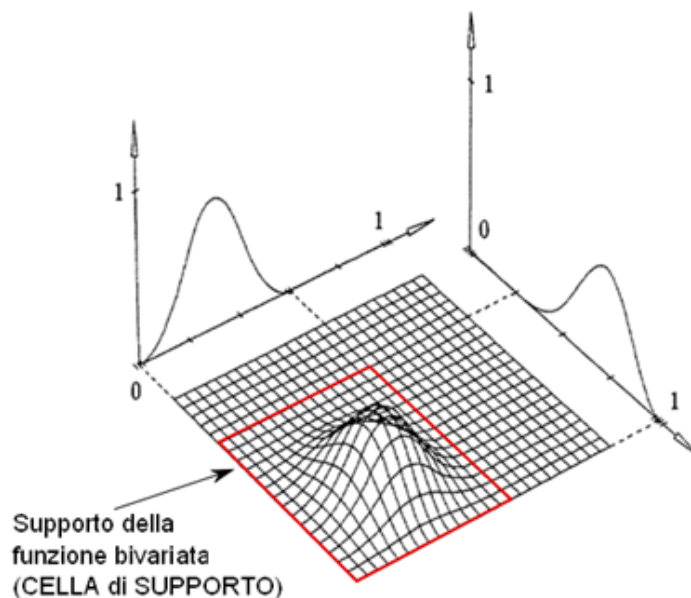


Figura 1.2

## 1.2 Definizione della geometria dell'elemento finito a doppia curvatura

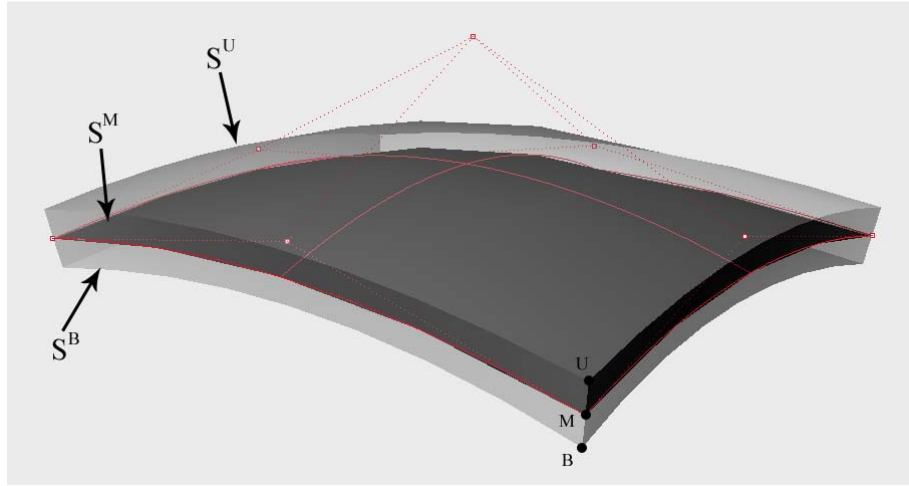
È possibile definire un elemento finito di tipo guscio degenerare partendo da un modello solido tridimensionale con interpolazione lineare lungo lo spessore.

La procedura di degenerazione originale, applicata ad elementi finiti tridimensionali con funzioni di forma interpolanti [6], prevede di sostituire i due nodi,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{B}$ , lungo lo spessore con un vettore che li unisce ( $\mathbf{U}-\mathbf{B}$ ) e un nodo  $\mathbf{M}$  sulla superficie media.

Le superfici B-spline non sono, in generale, superfici interpolanti, tuttavia si mostrerà che è possibile applicare una procedura di degenerazione semplicemente utilizzando i pdc al posto dei nodi. Consideriamo un solido tridimensionale delimitato superiormente ed inferiormente da due superfici B-spline con lo stesso numero di pdc ( $m$  e  $n$ ), stessi vettori dei nodi ( $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ ) e stesso grado ( $p$  e  $q$ ) delle funzioni di miscelamento. Presi due punti  $\mathbf{U}=\mathbf{S}^U(\xi, \eta)$  e  $\mathbf{B}=\mathbf{S}^B(\xi, \eta)$  su dette superfici, rispettivamente superiore e inferiore, è possibile passare da una descrizione in funzione dei punti di controllo  $\mathbf{P}_{ij}^B$  e  $\mathbf{P}_{ij}^U$  delle due superfici ad una descrizione in funzione dei punti di controllo  $\mathbf{P}_{ij}^M$ , che descrivono la superficie media, e dei vettori  $\mathbf{V}_{ij}^3$ , che descrivono la posizione dei punti del solido tridimensionale fuori dalla superficie media.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1-\zeta}{2} \mathbf{S}^B(\xi, \eta) + \frac{1+\zeta}{2} \mathbf{S}^U(\xi, \eta) = \\
 &= \frac{1-\zeta}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \mathbf{P}_{ij}^B + \frac{1+\zeta}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \mathbf{P}_{ij}^U = \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \frac{\mathbf{P}_{ij}^B + \mathbf{P}_{ij}^U}{2} + \zeta \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \frac{\mathbf{P}_{ij}^U - \mathbf{P}_{ij}^B}{2} = \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \mathbf{P}_{ij}^M + \frac{\zeta}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \mathbf{V}_{ij}^3 \\
 &= \mathbf{S}^M(\xi, \eta) + \frac{\zeta}{2} \mathbf{V}^3(\xi, \eta)
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\text{dove } \mathbf{P}_{ij}^M = \frac{\mathbf{P}_{ij}^B + \mathbf{P}_{ij}^U}{2}; \quad \mathbf{V}_{ij}^3 = \frac{\mathbf{P}_{ij}^U - \mathbf{P}_{ij}^B}{2} \quad \zeta \in [-1, 1]$$



**Figura 1.3:** Geometria elemento finito guscio: punti generici della superficie superiore ( $S^U$ ), media ( $S^M$ ) e inferiore ( $S^B$ ); punti corrispondenti  $U, M$  e  $B$  considerati sulla stessa fibra ( $\zeta = \text{cost.}$ )

Un componente in parete sottile, essendo usualmente idealizzato come una superficie, è di solito rappresentato geometricamente dalla propria superficie media, che fornisce direttamente solo il valore dei pdc  $\mathbf{P}_{ij}^M$ . I vettori  $\mathbf{V}_{ij}^3$  possono essere calcolati supponendo, per piccoli spessori, che la direzione del vettore ( $U-B$ ) possa essere approssimata a quella della normale alla superficie media in  $\mathbf{M} = \mathbf{S}^M(\xi, \eta)$ . Siano  $\mathbf{V}^\xi$  e  $\mathbf{V}^\eta$  i vettori tangenti alla superficie media in  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{V}^\xi = \frac{\partial \mathbf{S}^M(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{V}^\eta = \frac{\partial \mathbf{S}^M(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (1.7)$$

e sia  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\xi, \eta)$  il versore normale alla superficie media in  $\mathbf{S}^M(\xi, \eta)$ , calcolato come prodotto vettoriale normalizzato dei vettori tangenti:

$$\mathbf{n}(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{V}^\xi \wedge \mathbf{V}^\eta}{|\mathbf{V}^\xi \wedge \mathbf{V}^\eta|}. \quad (1.8)$$

Indicato con  $t = t(\xi, \eta)$  il valore dello spessore, gli  $m \cdot n$  vettori  $\mathbf{V}_{ij}^3$  possono essere calcolati interpolando i valori del prodotto  $(\mathbf{n}(\xi, \eta) \cdot t(\xi, \eta))$  calcolato nelle  $m \cdot n$  ascisse di Greville  $(\xi_a, \eta_b)$  [7], ovvero risolvendo il sistema di equazioni:

$$t(\xi_a, \eta_b) \cdot \mathbf{n}(\xi_a, \eta_b) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i^p(\xi_a) N_j^q(\eta_b) \mathbf{V}_{ij}^3 \quad \text{con } a=1, \dots, m; \quad b=1, \dots, n; \quad (1.9)$$

In forma matriciale:

$$\mathbf{t}_{nx} = \mathbf{F} \mathbf{V}_x^3; \quad \mathbf{t}_{ny} = \mathbf{F} \mathbf{V}_y^3; \quad \mathbf{t}_{nz} = \mathbf{F} \mathbf{V}_z^3; \quad (1.10)$$

dove  $\mathbf{F}$  è una matrice, di vettori dimensioni  $(m \cdot n) \times (m \cdot n)$ , il cui generico elemento posizionato sulla riga  $[m(a-1)+b]$  e colonna  $[m(i-1)+j]$  è:

$$\mathbf{F}[m(a-1)+b, m(i-1)+j] = N_i^p(\xi_a) N_j^q(\eta_b). \quad (1.11)$$

I vettori  $\mathbf{V}_{ij}^3$  calcolati dalla (1.10) possono essere normalizzati in modo da esplicitare il versore  $\mathbf{v}_{ij}^3$  e il coefficiente  $t_{ij}$  che regola la variazione dello spessore del guscio:

$$\mathbf{V}_{ij}^3 = |\mathbf{V}_{ij}^3| \cdot \frac{\mathbf{V}_{ij}^3}{|\mathbf{V}_{ij}^3|} = t_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}^3 \quad (1.12)$$

La geometria del guscio può quindi essere espressa come:

$$S(\xi, \eta, \zeta) = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \left[ \mathbf{P}_{ij}^M + \frac{\zeta}{2} t_{ij} \mathbf{v}_{ij}^3 \right] \quad (1.13)$$

### 1.3 Definizione delle equazioni per l'elemento finito guscio di Mindlin

La ben nota teoria delle superfici sottili di Kirchhoff-Love è ben nota e permette di studiare molti problemi riguardanti componenti in parete sottile in maniera semplice. Tuttavia, per piastre spesse, moderatamente spesse e per materiali laminati può essere necessario considerare anche la deformazione di taglio fuori dal piano. La teoria di Reissner-Mindlin (R-M) ammette le deformazioni di taglio: rotazioni e derivate di spostamento non sono direttamente legate e differiscono della deformazione di taglio. Di conseguenza l'approssimazione agli elementi finiti del campo di spostamento non è necessario che abbia una continuità di classe maggiore di  $C^0$ .

Il metodo utilizzato in questa tesi per sviluppare l'elemento finito guscio basato sulla teoria di R-M è noto come “Degenerate shell approach” e fu originariamente introdotto da Ahmad *et al.* [5]. Tale metodo si basa sulla riduzione (degenerazione) di un elemento tridimensionale in un elemento guscio avente gradi di libertà definiti solo sulla superficie media.

Il processo di riduzione impiegato si basa sulle seguenti tre assunzioni:

1. le normali alla superficie media prima della deformazione rimangono dritte, ma non necessariamente normali alla superficie media dopo la deformazione.
2. la tensione normale, in direzione dello spessore, è trascurabile.
3. lo spessore del guscio rimane costante durante la deformazione.

La prima equivale a tenere in conto l'effetto della deformazione di taglio trasversale mediante l'utilizzo di due gradi di libertà di rotazione. La seconda assunzione, invece, è la tipica condizione di tensione piana, tradizionalmente usata nella teoria di piastre e gusci: questa condizione è usata per ridurre le relazioni costitutive tridimensionali a quelle superficiali. L'ultima assunzione, infine, implica che lo spessore del guscio in ogni punto, misurato lungo la direzione della fibra  $\zeta$ , non varia nelle diverse configurazioni deformate del guscio; ciò implica deformazioni nulle lungo la direzione delle fibre.

Il metodo descritto è usato nello sviluppo di molti elementi guscio largamente usati in codici commerciali ad elementi finiti.

#### 1.3.1 Campo di spostamento

Il campo di spostamento può essere definito seguendo l'approccio isoparametrico ed imponendo l'inestensibilità in direzione dello spessore [6]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \left( \begin{Bmatrix} u_{ij} \\ v_{ij} \\ w_{ij} \end{Bmatrix} + \frac{\zeta t_{ij}}{2} [-\mathbf{v}_{ij}^2 \quad \mathbf{v}_{ij}^1] \begin{Bmatrix} \alpha_{ij} \\ \beta_{ij} \end{Bmatrix} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \left( \begin{Bmatrix} u_{ij} \\ v_{ij} \\ w_{ij} \end{Bmatrix} + \frac{\zeta t_{ij}}{2} \begin{bmatrix} -l_{ij}^2 & l_{ij}^1 \\ -m_{ij}^2 & m_{ij}^1 \\ -n_{ij}^2 & n_{ij}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{ij} \\ \beta_{ij} \end{Bmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Dove  $(\mathbf{v}_{ij}^1, \mathbf{v}_{ij}^2, \mathbf{v}_{ij}^3)$  è un sistema di riferimento ortonormale definito nel punto di controllo  $\mathbf{P}_{ij}^M$ .

I  $\mathbf{v}_{ij}^1$  vengono ottenuti interpolando i valori di  $\mathbf{V}^\xi / |\mathbf{V}^\xi|$  con la stessa tecnica utilizzata per ottenere  $\mathbf{v}_{ij}^3$  (paragrafo 1.2) e

$$\mathbf{v}_{ij}^2 = \mathbf{v}_{ij}^3 \wedge \mathbf{v}_{ij}^1 \tag{1.15}$$

In forma matriciale il campo di spostamento risulta:

$$\mathbf{d} = \mathbf{N} \mathbf{q} \tag{1.16}$$

dove  $\mathbf{N}$  è la matrice delle funzioni di forma:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} & \dots & \mathbf{N}_{ij} & \dots & \mathbf{N}_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

con

$$\mathbf{N}_{ij} = \begin{bmatrix} N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) & 0 & 0 & -\zeta t_{ij} N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) l_{ij}^2 / 2 & t_{ij} N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) l_{ij}^1 / 2 \\ 0 & N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) & 0 & -\zeta t_{ij} N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) m_{ij}^2 / 2 & t_{ij} N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) m_{ij}^1 / 2 \\ 0 & 0 & N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) & -\zeta t_{ij} N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) n_{ij}^2 / 2 & t_{ij} N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) n_{ij}^1 / 2 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

$\mathbf{q}$  è il vettore degli spostamenti generalizzati:

$$\mathbf{q} = \left\{ \mathbf{q}_{11} \quad \mathbf{q}_{12} \quad \dots \quad \mathbf{q}_{ij} \quad \dots \quad \mathbf{q}_{mn} \right\}^T \quad (1.19)$$

con

$$\mathbf{q}_{ij} = \left\{ u_{ij} \quad v_{ij} \quad w_{ij} \quad \alpha_{ij} \quad \beta_{ij} \right\} \quad (1.20)$$

### 1.3.2 Equazioni cinematiche (legame deformazioni-spostamenti)

Le componenti di deformazione vengono ottenute tramite il tensore di deformazione infinitesima (tensore di deformazione di Green-Lagrange trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.21)$$

Utilizzando la notazione di Voigt-Kelvin:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{11} & \varepsilon_y &= \varepsilon_{22} & \varepsilon_z &= \varepsilon_{33} \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{12} & \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{23} & \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{13} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \right\}^T = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{q} \\ &= \sum_i \sum_j \mathbf{B}_{ij} \left\{ u_{ij} \quad v_{ij} \quad w_{ij} \quad \alpha_{ij} \quad \beta_{ij} \right\}^T = \sum_i \sum_j \mathbf{B}_{ij} \cdot \mathbf{q}_{ij} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} \end{aligned} \quad (1.23)$$

dove  $\mathbf{B}$  è la matrice di congruenza e  $\mathbf{L}$  è la matrice dell'operatore differenziale

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

che coinvolge la trasformazione di coordinate

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \\ \partial/\partial \zeta \end{Bmatrix} \quad (1.25)$$

con

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

dove  $x, y$  e  $z$  sono date dalla Eq.(1.13).

### 1.3.3 Equazioni costitutive e trasformazioni di coordinate

Si è utilizzato il modello costitutivo di Hooke generalizzato:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.27)$$

dove

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \right\}^T \quad (1.28)$$



è il vettore delle tensioni ed  $\mathbf{E}$  è la matrice di legame costitutivo.

È stato definito un sistema di coordinate locali  $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\}$  in ogni punto della superficie media del guscio tramite:

$$\mathbf{v}^1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \mathbf{v}_{ij}^1 \quad (1.29)$$

$$\mathbf{v}^3 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \mathbf{v}_{ij}^3 \quad (1.30)$$

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^3 \wedge \mathbf{v}^1 \quad (1.31)$$

così da avere  $\mathbf{v}^3$  normale e  $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$  tangenti alla superficie media.

La matrice di legame, per un materiale isotropo in stato di tensione piana, nel sistema di riferimento  $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\}$  appena definito ha la forma:

$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G^* \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

dove  $E$  è il modulo di Young,  $\nu$  il coefficiente di Poisson,  $G$  è il modulo di elasticità tangenziale che vale:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.33)$$

$$G^* = \frac{5}{6} G \quad (1.34)$$

Il valore  $5/6$  (valido per una sezione rettangolare e per materiale omogeneo) tiene conto dell'approssimazione dovuta all'utilizzo della teoria di Mindlin che ipotizza un valore costante della deformazione di taglio trasversale lungo lo spessore.

La matrice  $\mathbf{E}$  nel sistema di riferimento globale  $\{x, y, z\}$  si ottiene tramite la trasformazione di coordinate

$$\mathbf{E} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{E}' \cdot \mathbf{T} \quad (1.35)$$

Per l'espressione della  $\mathbf{T}_e$  si veda [6].

### 1.3.4 Equazioni del moto

Le matrici sono state derivate utilizzando il principio di minimo dell'energia potenziale totale considerando piccole vibrazioni attorno a posizioni di equilibrio stabile:

$$\Pi = U + V + W + \Delta W \Rightarrow \min \quad (1.36)$$

dove:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot d\Omega \quad (1.37)$$

*energia potenziale di deformazione elastica*

$$V = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{vis}} \cdot d\Omega \quad (1.38)$$

*energia potenziale delle azioni viscosse*

$$W = - \int_{\Omega} \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{f} \cdot d\Omega - \int_{S(\Omega)} \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{p} \cdot dS \quad (1.39)$$

*energia potenziale delle azioni esterne*

$$\Delta W = - \int_{S(\Omega)} \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{p}_{\text{VINC}} \cdot dS \quad (1.40)$$

*energia potenziale delle azioni vincolari esterne*

$W$  comprende anche il contributo delle azioni inerziali  $\mathbf{f}_i$  che vale:

$$W_i = \int_{\Omega} \rho \cdot \mathbf{d}^T \cdot \ddot{\mathbf{d}} d\Omega \quad (1.41)$$

Introducendo il campo di spostamento  $\mathbf{d}$ , funzione (Eq.(1.16)) dei gradi di libertà generalizzati  $\mathbf{q}$ , nelle (1.23) e (1.27) si ha:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^T = \mathbf{q}^T \cdot (\mathbf{L} \cdot \mathbf{N})^T \quad (1.42)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} \quad (1.43)$$

Inoltre

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{VIS}} = \mathbf{E}_{\text{VIS}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{E}_{\text{VIS}} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (1.44)$$

Introducendo le precedenti nel funzionale (1.36) si ottiene

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{N})^T \mathbf{E} (\mathbf{L}\mathbf{N}) d\Omega \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (1.45)$$

$$V = \mathbf{q}^T \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{N})^T \mathbf{E}_{\text{VIS}} (\mathbf{L}\mathbf{N}) d\Omega \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} W &= - \int_{\Omega} \mathbf{d}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Sigma(\Omega)} \mathbf{d}^T \mathbf{p} d\Sigma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{d}^T \ddot{\mathbf{d}} d\Omega = \\ &= - \mathbf{q}^T \left( \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Sigma(\Omega)} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\Sigma \right) + \mathbf{q}^T \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \ddot{\mathbf{q}} = \\ &= - \mathbf{q}^T \mathbf{F} + \mathbf{q}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned}
\Delta W &= -\frac{1}{2} \int_{\Sigma(\Omega)} \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{p}_{\text{VINC}} d\Sigma = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma(\Omega)} \mathbf{d}^T \cdot (-\mathbf{K}_{\text{VINC}} \cdot \mathbf{d}) \cdot d\Sigma \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \cdot \int_{\Sigma(\Omega)} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{K}_{\text{VINC}} \cdot \mathbf{N} \cdot d\Sigma \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \cdot \Delta \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}
\end{aligned} \tag{1.48}$$

dove  $\mathbf{K}_{\text{VINC}}$  è una matrice che contiene i coefficienti di rigidezza di molle distribuite utilizzate per imporre le condizioni al contorno.

In definitiva l'energia totale è:

$$\Pi = U + \Delta W + V + W = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T (\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^T \mathbf{F} + \mathbf{q}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \tag{1.49}$$

e, imponendone la stazionarietà,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = 0 \tag{1.50}$$

si ottengono le equazioni di equilibrio

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) \mathbf{q} = \mathbf{F} \tag{1.51}$$

Riassumendo le matrici sono:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \cdot \det J \cdot d\Omega \tag{1.52}$$

$$\Delta \mathbf{K} = \int_{\Sigma(\Omega)} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{K}_{\text{VINC}} \cdot \mathbf{N} \cdot d\Sigma \quad (1.53)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_{\text{VIS}} \mathbf{B} \cdot \det J \cdot d\Omega \quad (1.54)$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \cdot \det J \cdot d\Omega \quad (1.55)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Sigma(\Omega)} \mathbf{N}^T \mathbf{\Phi} \cdot \det J \cdot d\Sigma \quad (1.56)$$

$\Omega$  rappresenta il solido in esame,  $\Sigma(\Omega)$  la superficie, contorno di  $\Omega$ , sulla quale si considerano applicati i carichi esterni,  $\det J$  il determinante della matrice Jacobiana di trasformazione delle coordinate dal dominio parametrico a quello Euclideo tridimensionale.

Supponendo per la risposta libera del sistema una dipendenza temporale del tipo:

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} \sin(\omega t); \quad \dot{\mathbf{q}} = \omega \bar{\mathbf{q}} \cos(\omega t); \quad \ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \bar{\mathbf{q}} \sin(\omega t) \quad (1.57)$$

e supponendo che la matrice  $\mathbf{C}$  sia:

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Phi} \mathbf{C}_d \mathbf{\Phi}^T \quad (1.58)$$

dove  $\mathbf{C}_d$  è una matrice diagonale e  $\mathbf{\Phi}$  è la matrice degli autovettori del problema non smorzato, calcolabile risolvendo l'autoproblema algebrico:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (1.59)$$

è possibile calcolare la frequenza naturale  $i$ -esima del sistema smorzato tramite la:

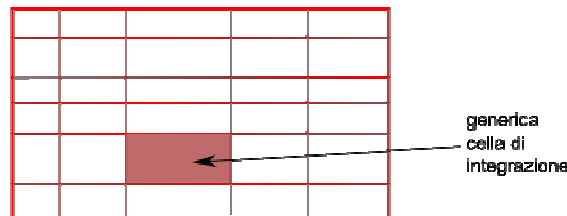
$$\omega_{si} = \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (1.60)$$

dove  $\omega_{ni}$  è la pulsazione naturale i-esima del sistema non smorzato, e  $\zeta_i$  è il fattore di smorzamento del modo i-esimo.

## 1.4 Integrazione numerica

Per calcolare gli integrali da (1.52) a (1.56) è stato utilizzato un metodo di integrazione numerica (*quadratura*). I metodi di integrazione numerica di Gauss sono preferiti nei software ad elementi finiti perché sono tra i più efficienti: permettono infatti di ottenere formule di quadratura il cui ordine è doppio rispetto a quelle di Newton-Cotes, a parità di numero di valutazioni della funzione integranda. Tuttavia, il maggior ordine si traduce in maggiore accuratezza solo quando la funzione integranda è ben approssimata da un polinomio [9]. Le formule di integrazione di Gauss-Legendre garantiscono accuratezza di ordine  $2N$  con  $N$  punti di integrazione ed  $N$  pesi: ciò vuol dire che se la funzione integranda è un polinomio di grado  $(2N-1)$ , servono  $N$  punti di valutazione per integrarla esattamente (*integrazione piena*). Generalmente, la matrice di rigidezza non può essere integrata esattamente con il metodo di Gauss-Legendre [10]. Tuttavia, tale errore di integrazione diminuisce all'aumentare dei gradi di libertà usati per la discretizzazione. Inoltre, è pratica comune l'utilizzo di regole di ordine inferiore (*integrazione ridotta*) per ridurre errori come per esempio quelli dovuti al fenomeno del *locking* [6,10,11].

Considerando una singola patch con  $(m \cdot n)$  punti di controllo, è possibile visualizzare il dominio parametrico rettangolare su cui è definita, tramite i vettori dei nodi  $\mathbf{H} = [h_1, \dots, h_{m+p+1}]$  e  $\mathbf{G} = [g_1, \dots, g_{n+q+1}]$ , ed il reticolo che delimita le *celle di integrazione*  $[h_i, h_{i+1}] \times [g_j, g_{j+1}] (i=1, \dots, m+p; j=1, \dots, n+q)$  (Figura 1.4)



**Figura 1.4:** identificazione della cella di integrazione tramite i vettori dei nodi

Su ogni cella di integrazione il campo di spostamento della superficie media è descritto dal prodotto di un polinomio di grado  $p$  (nella variabile  $\xi$ ) per un polinomio di grado  $q$  (nella variabile  $\eta$ ). Inoltre, il campo di spostamento fuori dalla superficie varia linearmente con la variabile parametrica  $\zeta$ .

Con tali considerazioni si può affermare che la tipologia di elemento in esame l'utilizzo di una regola di quadratura di Gauss-Legendre, con  $(p+1) \times (q+1) \times 2$  punti di valutazione su ogni cella di integrazione, è sufficiente a non pregiudicare la convergenza [11]. Ciononostante, sono almeno due i motivi per cui si può pensare di utilizzare una regola di integrazione ridotta. Il primo riguarda il fatto che, per come sono definite le funzioni B-spline, il campo di spostamento tra due celle di integrazione contigue può essere raccordato in modo da avere una continuità fino a  $C^{p-1}$ : ciò impone dei vincoli alle funzioni di forma che possono diminuire il numero di punti di valutazione richiesto [19]. Il secondo è che alcuni problemi di irrigidimento numerico (come, ad esempio, il locking) possono essere attenuati utilizzando una regola di integrazione ridotta.

Alcune tipologie di elementi finiti basati sulla teoria di R-M tendono a soffrire del problema numerico chiamato Transverse Shear Locking [10]. L'irrigidimento numerico si manifesta quando l'elemento finito viene utilizzato per modellare un componente con spessore molto piccolo rispetto ad una sua dimensione caratteristica (il lato più lungo per un componente con geometria piana o il raggio di curvatura maggiore per un componente curvo). L'irrigidimento è principalmente dovuto ad errori di discretizzazione che producono un'energia interna spuria e, di conseguenza, la rigidità strutturale viene sovrastimata; inoltre, si osserva una riduzione della velocità di convergenza.

In letteratura è ben noto che l'utilizzo di metodi di integrazione ridotta può ridurre gli effetti del locking. Tuttavia, tali metodi possono generare una matrice di rigidità con un rango minore di quello atteso: dal punto di vista delle vibrazioni libere ciò si traduce nella generazione di modi di vibrare spuri, corrispondenti a frequenze naturali numericamente nulle. La matrice di rigidità che ne risulta non può essere utilizzata in maniera affidabile per modellare il comportamento di un sistema. Si è ritenuto opportuno valutare la possibilità di utilizzo, per l'elemento guscio proposto, dei metodi di integrazione ridotta verificando al contempo la presenza o meno di modi spuri.

Inoltre, alcuni autori hanno proposto, per ridurre l'effetto di irrigidimento dovuto al locking, di adottare funzioni di forma di grado  $p$  elevato. Pitkaranta et al.[20-22] hanno mostrato che, per migliorare la qualità dell'approssimazione numerica, l'aumento del grado  $p$

può essere più efficace rispetto all'aumento del numero di elementi finiti mantenendo  $p$  fisso. Per altre considerazioni sull'utilizzo di elementi di elevato ordine si veda [23-25]. In ragione di quanto detto finora, in questa tesi è stata anche considerata la possibilità di variare sia il grado che il numero delle funzioni B-spline utilizzate per discretizzare il campo di spostamento.

## 1.5 Variazione dei parametri di discretizzazione del campo di spostamento.

I parametri che definiscono la discretizzazione del campo di spostamento (1.14) sono essenzialmente il numero ( $m$  e  $n$ ) e il grado ( $p$  e  $q$ ) delle funzioni di forma B-spline utilizzate. In realtà, anche i vettori dei nodi  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  sono importanti: essi definiscono la distribuzione delle funzioni di forma B-spline sul dominio parametrico. Tuttavia, si è scelto di non trattare in questo lavoro la scelta dei vettori nodali ottimali: per il campo di spostamento sono stati utilizzati i vettori dei nodi della descrizione geometrica, oppure sono stati considerati dei vettori dei nodi equispaziati sul dominio parametrico.

Per migliorare la qualità dell'approssimazione è possibile variare i suddetti parametri ma è necessario mantenere l'isoparametricità tra la descrizione geometrica e quella del campo di spostamento per assicurare il rispetto dei modi di corpo rigido. Per far ciò si può ricorrere a diverse soluzioni. Hughes et al. [26] hanno proposto di utilizzare gli algoritmi, ben noti in Computer Grafica [2-4], di knot-insertion (per aumentare il numero delle funzioni) e degree-raising (per aumentarne il grado) per la rappresentazione geometrica. In tal modo è possibile variare i parametri di discretizzazione mantenendo intatta la forma geometrica originale e, in seguito, definire il campo di spostamento sfruttando l'ipotesi di isoparametricità (come fatto nel paragrafo 2.3.1). Un secondo modo, proposto in questa tesi, è quello di utilizzare una procedura di interpolazione per ottenere una nuova descrizione approssimata della geometria. Si consideri un generico componente di macchina la cui superficie media è descritta da una superficie B-spline tramite:

- $m$  funzioni  $N_i^p(\xi)$  di grado  $p$  definite sul vettore dei nodi  $\mathbf{H}$
- $n$  funzioni  $N_j^q(\eta)$  di grado  $q$  definite sul vettore dei nodi  $\mathbf{G}$ .
- $m \cdot n$  punti di controllo  $\mathbf{P}_{ij}^M$



e il cui generico vettore posizione è

$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \mathbf{P}_{ij}^M \quad (1.61)$$

Si vogliono ottenere i punti di controllo  $\bar{\mathbf{P}}_{ij}^M$  e i vettori  $\bar{\mathbf{V}}_{ij}^3$  di una superficie B-spline che approssimi la superficie media del componente di macchina, tramite:

- $\bar{m} \geq m$  funzioni  $N_i^{\bar{p}}(\xi)$  di grado  $\bar{p} \geq p$  definite sul vettore dei nodi  $\bar{\mathbf{H}}$
- $\bar{n} \geq n$  funzioni  $N_j^{\bar{q}}(\eta)$  di grado  $\bar{q} \geq q$  definite sul vettore dei nodi  $\bar{\mathbf{G}}$ .

I vettori dei nodi  $\bar{\mathbf{H}}$  e  $\bar{\mathbf{G}}$  hanno la forma:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}} &= \{h_1, \dots, h_{m+p+1}\} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_p, h_{p+1}, \dots, h_{m+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_p \right\} \\ \bar{\mathbf{G}} &= \{g_1, \dots, g_{n+q+1}\} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_q, g_{q+1}, \dots, g_{n+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_q \right\} \end{aligned} \quad (1.62)$$

dove i valori interni sono equispaziati nell'intervallo  $[0,1]$ .

La procedura di interpolazione è simile a quella introdotta nel paragrafo 1.2 per il calcolo dei vettori  $\mathbf{V}_{ij}^3$ . Le equazioni da soddisfare sono:

$$\begin{aligned} t(\xi_a, \eta_b) \cdot \mathbf{n}(\xi_a, \eta_b) &= \sum_{i=1}^{\bar{m}} \sum_{j=1}^{\bar{n}} N_i^{\bar{p}}(\xi_a) N_j^{\bar{q}}(\eta_b) \bar{\mathbf{V}}_{ij}^3 \quad \text{con } a=1, \dots, \bar{m}; \quad b=1, \dots, \bar{n}; \\ \mathbf{r}(\xi_a, \eta_b) &= \sum_{i=1}^{\bar{m}} \sum_{j=1}^{\bar{n}} N_i^{\bar{p}}(\xi_a) N_j^{\bar{q}}(\eta_b) \bar{\mathbf{P}}_{ij}^M \end{aligned} \quad (1.63)$$

Ciò porta a dover risolvere sei sistemi di equazioni algebriche, tutti con la stessa matrice dei coefficienti  $\mathbf{F}$  (si veda Eq.(1.10)): dato che i vettori  $\mathbf{V}_{ij}^3$  devono essere comunque calcolati, il carico computazionale aggiuntivo è irrisorio.

Il principale svantaggio di tale metodo è che non si ottiene il mantenimento della geometria originale ma solo un'approssimazione della stessa. Il principale vantaggio, rispetto all'utilizzo dell'algoritmo di degree-raising, è che si riesce ad ottenere un campo di spostamento con qualsiasi ordine di continuità, indipendentemente dalla geometria originale (per approfondimenti sull'utilizzo dell'algoritmo di degree-raising applicato ad elementi finiti si rimanda a [27]).

## 1.6 Risultati numerici

Sono state effettuate alcune simulazioni numeriche dopo aver implementato in ambiente Matlab le equazioni precedentemente introdotte. Le simulazioni hanno riguardato le vibrazioni libere di componenti con geometrie a curvatura nulla (piastra), e a semplice e doppia curvatura.

### 1.6.1. Piastra quadrata incastrata

Il primo test numerico riguarda lo studio delle vibrazioni libere di una piastra quadrata sottile incastrata sui quattro lati. È stata effettuata un'analisi di convergenza della soluzione variando:

- numero delle funzioni di forma
- grado delle funzioni di forma ( $p=q=2, \dots, 6$ )
- regola di quadratura (piena/ridotta)

$L$  è la lunghezza laterale della piastra,  $t$  è il suo spessore. Le proprietà geometriche e del materiale hanno i seguenti valori:

$$L = 1 \text{ m}$$

$$t = 5e-3 \text{ m}$$

$$\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$$

$$E = 2e+5 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.3$$

La soluzione di riferimento è quella proposta da Leissa utilizzando il metodo di Rayleigh-Ritz e le autofunzioni della trave come funzioni ammissibili [13].

Le frequenze naturali sono riportate nella forma adimensionalizzata:

$$\lambda = \omega L^2 \sqrt{\rho/D}$$

dove  $\omega$  è la pulsazione naturale e

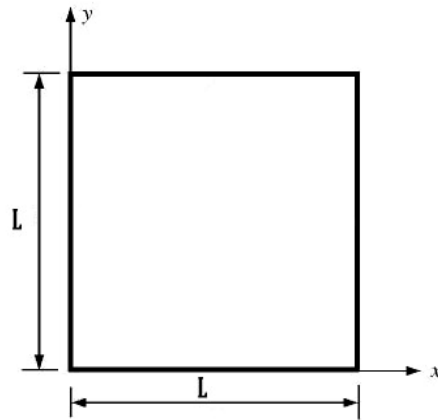
$$D = \frac{Et^2}{12(1-\nu^2)}$$

è la rigidezza flessionale.

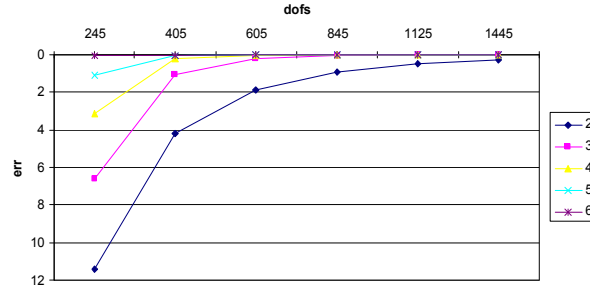
In Figura 1.6, per la quinta frequenza libera adimensionalizzata, è riportato l'andamento dell'errore nella forma:

$$err = \frac{\lambda - \lambda_{reference}}{\lambda_{reference}}$$

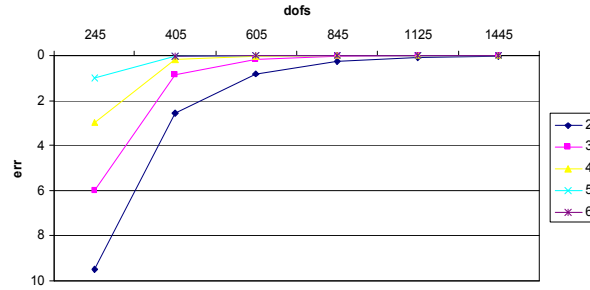
utilizzando l'integrazione di Gauss-Legendre con  $(p+1) \times (q+1) \times 2$ .



**Figura 1.5:** piastra quadrata incastrata sui quattro lati



**Figura 1.6:** Piastra quadrata incastrata. Andamento dell'errore per la quinta frequenza naturale. Integrazione piena.



**Figura 1.7:** Piastra quadrata incastrata. Andamento dell'errore per la quinta frequenza naturale. Integrazione ridotta.

L'andamento dell'errore utilizzando un metodo di quadratura con  $p \times q \times 2$  punti di valutazione è riportato in Figura 1.7.

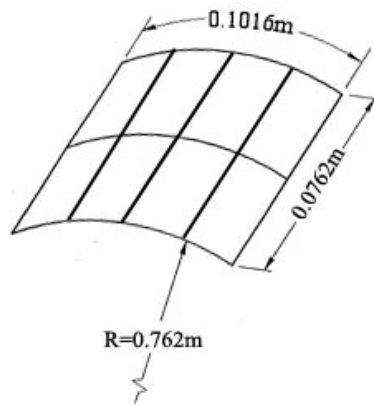
L'utilizzo di un metodo di quadratura ridotto non ha generato modi spuri (ad energia nulla) a livello globale, eccetto nel caso in cui sono state utilizzate B-spline di sesto grado e una discretizzazione con 245 gdl. In tal caso la geometria della piastra è generata da una griglia di  $7 \times 7$  punti di controllo con funzioni di sesto grado: la patch B-spline si riduce ad una patch di Bezier. In conseguenza dell'isoparametricità, il campo di spostamento dell'elemento è descritto dal prodotto di un polinomio di grado  $p$  nella variabile  $\xi$  per un polinomio di grado  $q$  nella variabile  $\eta$  (inoltre il campo di spostamento è lineare in  $\zeta$ ): l'utilizzo di una regola di

quadratura con  $p \times q \times 2$  punti non è sufficiente ad integrare la matrice di rigidezza **K**. Questo è il motivo per cui non è stata riportata la soluzione nel caso  $p=q=6$  con 245 gdl in Figura 1.7.

### 1.6.2 Guscio cilindrico incastrato.

È stato considerato un guscio a semplice curvatura (cilindrico) incastrato sui quattro lati.

Lo spessore del guscio è  $t=3.302e-4$  m. Le altre dimensioni necessarie a definirne la geometria sono riportate in Figura 1.8. Le proprietà del materiale sono:



**Figura 1.8:** Guscio cilindrico incastrato.

**Tabella 1.1:** Risultati e riferimenti per le frequenze proprie [Hz] del modello di guscio cilindrico incastrato.

i	BSP p=6, 1445gdl	Ref. a	Ref. b	Ref. c	LAG9	ASL9	Assumed Natural Shell 2646 gdl
1	872.51	869.56	890	870	897.142	879.244	878.253
2	961.12	957.56	973	958	989.541	968.427	966.972
3	1291.66	1287.56	1311	1288	1356.33	1302.47	1300.51
4	1368.47	1363.21	1371	1364	1407.25	1378.65	1377.21
5	1444.24	1440.26	1454	1440	1494.9	1455.03	1453.50
6	1757.66	1755.59	1775	1753	1854.01	1770.87	1768.54
7	1782.92	1779.63	1816	1779	1996.44	1802.15	1797.46

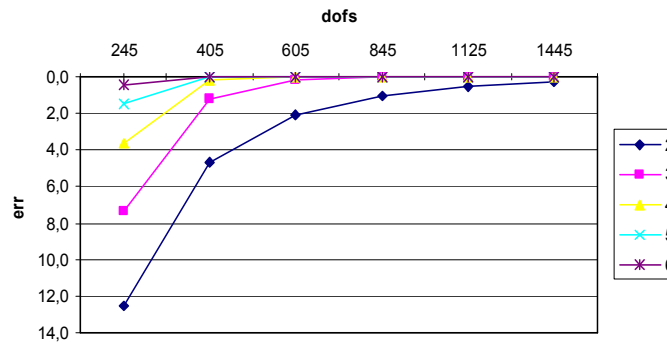
$$\rho = 2636 \text{ Kg/m}^3$$

$$E = 6.89e+4 \text{ MPa}$$

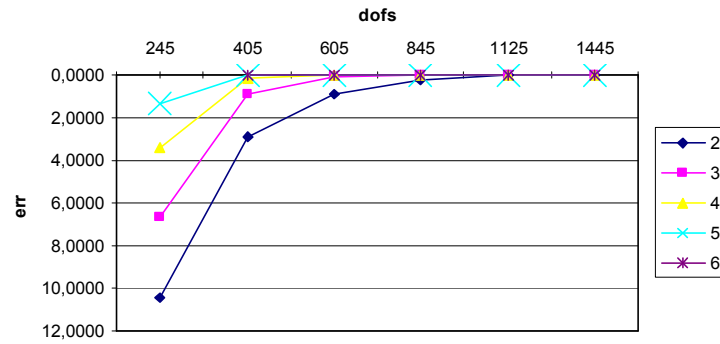
$$\nu = 0.33$$

Tale modello è stato studiato numericamente da vari autori. Alcune soluzioni proposte sono riportate nella Tabella 1.1 così come riportate in [14]: tutti i risultati sono in [Hz],  $i$  indica l'indice del modo considerato. *Ref.a* e *Ref.b* sono soluzioni numeriche. *Ref.c* è una soluzione analitica basata su una teoria guscio di ordine elevato. LAG9 e ASL9 sono risultati di riferimento ottenuti con elementi finiti guscio Lagrangiani con 9 nodi con formulazioni, rispettivamente, agli spostamenti e *assumed strain*. La Tabella 1.1 riporta anche la soluzione ottenuta con l'elemento proposto in questa tesi (BSP) utilizzando funzioni di forma B-spline di sesto grado ed una discretizzazione con 1445 gdl.

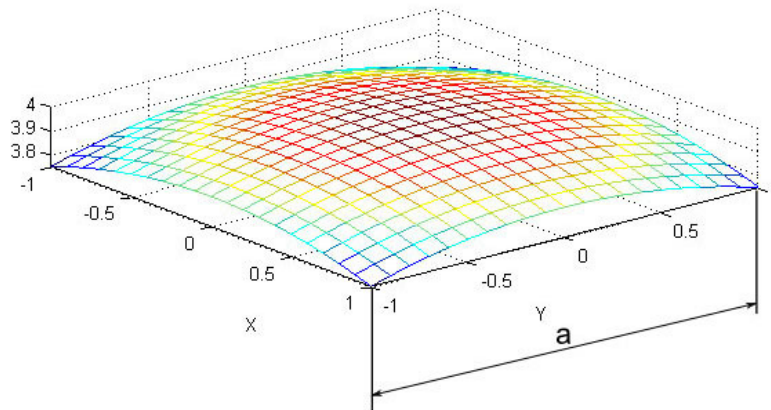
Le Figura 1.9-10 mostrano l'andamento dell'errore della quinta frequenza naturale, normalizzato rispetto alla soluzione *Ref.c* utilizzata come riferimento, al variare del numero di gdl per funzioni B-spline con grado da 2 a 6. La matrice di rigidezza è stata calcolata utilizzando sia un metodo di integrazione piena (Figura 1.9) sia un metodo di integrazione ridotta (Figura 1.10)



**Figura 1.9:** Guscio cilindrico incastrato. Andamento dell'errore per la quinta frequenza naturale. Integrazione piena.



**Figura 1.10:** Guscio cilindrico incastrato. Andamento dell'errore per la quinta frequenza naturale. Integrazione ridotta.



**Figura 1.11:** Guscio sferico ribassato a pianta quadrata.

### 1.6.3. Guscio sferico incastrato

È stato infine considerato il modello di un guscio a doppia curvatura (sferico). Il guscio è sottile, ribassato ed ha una proiezione quadrata sul piano sottostante (Figura 1.11). Fissato il valore  $a$  del lato della proiezione, i parametri geometrici necessari a definirlo univocamente sono:

$$t / a = 0.01$$

$$a / R = 0.5$$

È stato introdotto il parametro di frequenza dimensionale  $\lambda = \omega \cdot a \cdot \sqrt{\rho / E}$ .

La Tabella 1.2 compara i risultati (le prime otto frequenze naturali) ottenuti con la formulazione proposta (funzioni B-spline di sesto grado, 1445 gdl ) sia con la soluzione ottenuta da Liew e Lim [15] utilizzando un metodo alla Ritz e la teoria classica dei gusci

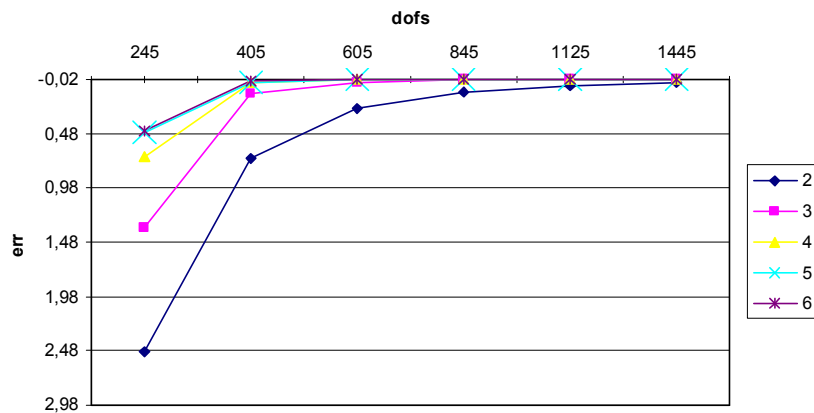
sottili, sia con quella ottenuta da Liew *et al.* [16] tramite un metodo p-Ritz con una formulazione tridimensionale agli spostamenti. Come comunemente accettato in letteratura (si veda ad esempio [17]), la teoria dei gusci classica sovrastima le frequenze naturali per gusci spessi. Nell'esempio numerico che si sta trattando, il guscio sferico ha un rapporto  $R/t = 50$ , che generalmente può essere ritenuto caratteristico di una superficie sottile.

**Tabella 1.2:** Riferimenti e risultati per le frequenze proprie adimensionali del modello di guscio sferico ribassato incastrato.

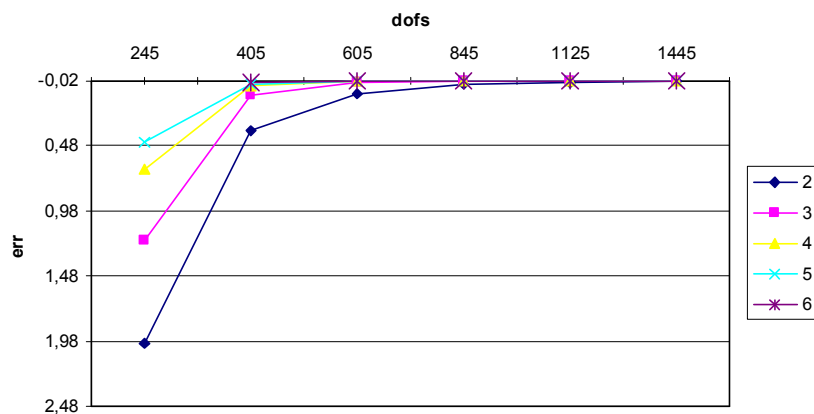
Par. num	Teoria gusci sottili	Metodo di Ritz 3D	BSP p=6, 1445gdl
1	0.58099	0.57638	0.56830
2	0.58099	0.57638	0.56843
3	0.59594	0.59134	0.58764
4	0.63537	0.63038	0.61863
5	0.65422	0.64764	0.63737
6	0.73299	0.72609	0.71156
7	0.73299	0.72609	0.71171
8	0.77902	0.77493	0.76099

Ciononostante si noti come i risultati ottenuti con la teoria dei gusci sottili forniscano frequenze proprie maggiori rispetto a quelle ottenute con la teoria tridimensionale. Perciò, per lo studio di convergenza dell'errore relativo per la sesta frequenza naturale adimensionale, sono stati presi come riferimento i risultati in [16]. In Figura 1.12 è riportato l'andamento dell'errore per il caso di integrazione piena; in Figura 1.13 per il caso di integrazione ridotta.





**Figura 1.12:** Guscio sferico ribassato incastrato. Convergenze dell'errore per la sesta frequenza libera adimensionale. Integrazione piena.



**Figura 1.13:** Guscio sferico ribassato incastrato. Convergenze dell'errore per la sesta frequenza libera adimensionale. Integrazione ridotta.

## Capitolo 2 MODELLAZIONE DI COMPONENTI CON FORME LIBERE

### 2.1 Introduzione

Una singola patch B-spline può rappresentare in maniera efficace forme geometriche mappabili su un dominio parametrico rettangolare semplicemente connesso. Per rappresentare la geometria di oggetti di utilizzo pratico spesso una singola patch non è sufficiente. Una possibile soluzione consiste nell'utilizzo di un assemblaggio: ogni patch viene *collegata* ad un'altra lungo un bordo comune ad entrambe. Le caratteristiche che tale tipo di collegamento deve soddisfare dipendono dall'utilizzo che si vuole fare del modello geometrico in questione. In una implementazione ad elementi finiti tale collegamento deve soddisfare la richiesta di continuità del campo di spostamento tra due patch contigue. Per l'elemento finito proposto nel capitolo precedente, la continuità richiesta è di tipo  $C^0$  perché nell'espressione del potenziale (1.36) sono presenti al più derivate del primo ordine del campo di spostamento (rispetto alle coordinate spaziali  $x, y$  e  $z$ ).

Per soddisfare tale richiesta di continuità si può utilizzare una tecnica simile a quella comunemente adottata per gli elementi finiti standard: si impone l'uguaglianza degli spostamenti (sui bordi di connessione delle due patch) imponendo l'uguaglianza dei gdl relativi.

Affinché sia lecito imporre l'uguaglianza dei singoli gdl (per assicurare la compatibilità degli spostamenti al bordo delle due patch B-spline) è sufficiente che i due campi di spostamento abbiano la stessa parametrizzazione sul bordo.

L'ultima affermazione può essere chiarita considerando le espressioni dei campi di spostamento  $\mathbf{d}^1$  e  $\mathbf{d}^2$  della superficie media (si considera  $\zeta = 0$ , per semplicità di notazione) di due patch, rispettivamente,  $\mathbf{P}^1$  e  $\mathbf{P}^2$ :

$$\mathbf{d}^1 = \sum_{i=1}^{M1} \sum_{j=1}^{N1} N_i^{p1}(\xi_1) N_j^{q1}(\eta_1) \mathbf{d}_{ij}^1 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{d}^2 = \sum_{i=1}^{M2} \sum_{j=1}^{N2} N_i^{p2}(\xi_2) N_j^{q2}(\eta_2) \mathbf{d}_{ij}^2. \quad (2.2)$$

Si vuole imporre che il campo di spostamento del bordo corrispondente alla coordinata parametrica  $\xi_1 = 1$  della patch  $\mathbf{P}^1$ , sia uguale allo spostamento del bordo corrispondente alla coordinata parametrica  $\xi_2 = 0$  della patch  $\mathbf{P}^2$ . Come conseguenza della scelta, per i vettori dei nodi  $\mathbf{H1}$  e  $\mathbf{H2}$ , di avere nodi di estremità con molteplicità pari all'ordine delle funzioni (paragrafo 1.1) si ha:

$$N_i^{p1}(\xi_1 = 1) = \begin{cases} 0 & \text{per } i = 1, \dots, M1 - 1 \\ 1 & \text{per } i = M1 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$N_i^{p2}(\xi_2 = 0) = \begin{cases} 1 & \text{per } i = 1 \\ 0 & \text{per } i = 2, \dots, M2 \end{cases} \quad (2.4)$$

quindi le (2.1) e (2.2) si semplificano nelle espressioni monovariate:

$$\mathbf{d}^1(\xi_1 = 1, \eta_1) = \sum_{j=1}^{N1} N_j^{q1}(\eta_1) \mathbf{d}_{M1j}^1 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{d}^2(\xi_2 = 0, \eta_2) = \sum_{j=1}^{N2} N_j^{q2}(\eta_2) \mathbf{d}_{M2j}^2. \quad (2.6)$$

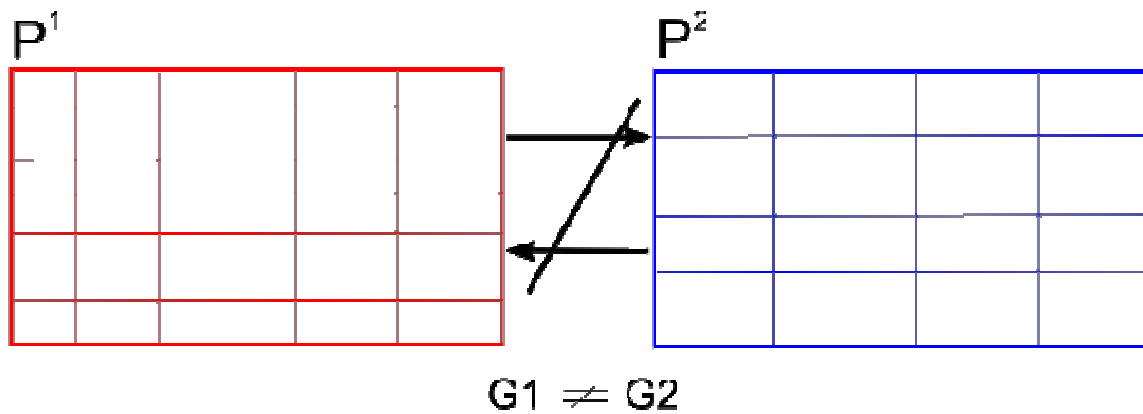
Se si impone  $\mathbf{G1} = \mathbf{G2}$  e  $N1 = N2$ , deve essere  $q1 = q2$ <sup>1</sup>: affinché gli spostamenti  $\mathbf{d}^1$  e  $\mathbf{d}^2$  siano uguali in ogni punto  $\eta_1 = \eta_2$ , per l'unicità della base B-spline [28], deve valere l'uguaglianza, per ogni j,  $\mathbf{d}_{M1j}^1 = \mathbf{d}_{M2j}^2$ .

Allorché si voglia collegare due patch con parametrizzazione diversa (Figura 2.1), evento frequente nella pratica, è possibile utilizzare l'operazione di *knot-refinement* [4]. Tale operazione non è locale, nel senso che comporta un aumento dei pdc del modello geometrico (e quindi dei gdl dell'elemento finito) non solo sul bordo comune alle due patch ma in tutto il dominio (Figura 2.2). L'aumento è dovuto al modo in cui è definita una generica superficie B-spline (si veda eq.(1.4)), e può rendere un modello ad elementi finiti inutilmente pesante dal punto di vista computazionale.

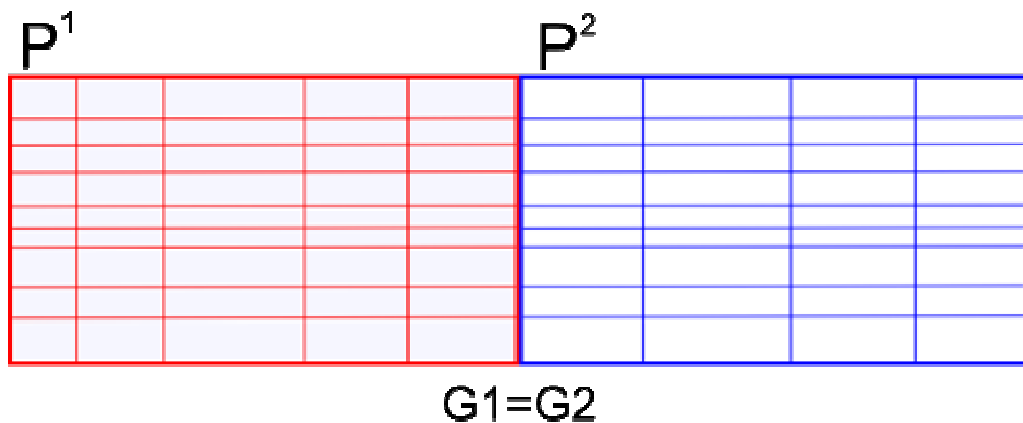
---

<sup>1</sup> Perché si è scelto di utilizzare vettori dei nodi che rendono la curva B-spline interpolante alle estremità (vedi paragrafo 1.1).

Per imporre l'uguaglianza dei campi di spostamento è possibile utilizzare il metodo proposto da Kagan *et al.* [29], nel caso in cui la geometria di una patch sia ottenibile dall'altra tramite operazione di *knot-refinement*. Anche tale richiesta è però limitante nell'applicazione pratica. Per tale motivo si è deciso di considerare altre tipologie di funzioni spline. Dopo un breve richiamo alle funzioni PB-spline verranno discussi vantaggi e svantaggi che tale generalizzazione porta, rispetto alle B-spline, nell'ambito dell'elemento finito a guscio. In seguito viene proposta un'alternativa per tentare di coniugare i vantaggi di entrambe le formulazioni.



**Figura 2.1:** Proiezione delle patch da collegare nel dominio parametrico



**Figura 2.2:** aumento dei gdl dovuto all'utilizzo dell'algoritmo di knot-insertion per avere la stessa parametrizzazione sui bordi da unire

## 2.2 Funzioni PB-spline

Le funzioni Point Based spline (PB-spline) sono delle funzioni introdotte da Sederberg [30].

Una superficie PB-spline è definita dall'equazione:

$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^l \mathbf{P}_k \cdot R_k^{pq}(\xi, \eta) = \frac{\sum_{k=1}^l \mathbf{P}_k \cdot B_k^{pq}(\xi, \eta)}{\sum_{k=1}^l B_k^{pq}(\xi, \eta)} \quad (\xi, \eta) \in D \quad (2.7)$$

$\mathbf{P}_i$  è l' $i$ -esimo pdc associato alla funzione di miscelamento  $i$ -esima

$$B_k^{pq}(\xi, \eta) = N_k^p(\xi) N_k^q(\eta) \quad (2.8)$$

dove  $N_k^p(\xi)$  è una funzione B-spline monovariata univocamente definita dal vettore dei nodi

$\mathbf{H}_k = \{h_1^k, \dots, h_{p+2}^k\}$  (similmente,  $N_k^q(\eta)$  è definita dal vettore dei nodi  $\mathbf{G}_k = \{g_1^k, \dots, g_{q+2}^k\}$ ).

Con tale definizione ogni funzione di miscelamento  $B_k^{pq}(\xi, \eta)$  è definita su un dominio parametrico  $D^k = [h_1^k, h_{p+2}^k] \times [g_1^k, g_{q+2}^k]$  detto *dominio di influenza*. Poiché il dominio di influenza di un pdc può essere definito indipendentemente da quelli degli altri pdc, la superficie è definita sul dominio  $D \subseteq \{\cup D^k\}$  che non è necessariamente rettangolare (diversamente da una superficie B-spline).

Con tale definizione una superficie B-spline risulta essere un caso particolare di superficie PB-spline: ricordando che per le B-spline vale la seguente

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n B_{ij}^{pq}(\xi, \eta) = 1, \quad (2.9)$$

l'espressione (1.4), dei punti di una patch B-spline può essere riscritta nella forma (2.7) dove  $k = n(i-1) + j$ .  $\mathbf{H}_k$  e  $\mathbf{G}_k$  sono sottoinsiemi, detti *vettori dei nodi locali*, dei vettori dei nodi  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  (definiti nel paragrafo 1.1):

$$\mathbf{H}_k = \{h_i, \dots, h_{i+p+1}\} \subset \mathbf{H} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{G}_k = \{g_j, \dots, g_{j+q+1}\} \subset \mathbf{G}. \quad (2.11)$$

È importante notare alcune proprietà di una superficie PB-spline:

- a) è rappresentata da una combinazione lineare di funzioni di miscelamento (generalmente razionali).
- b) è invariante rispetto alle trasformazioni affini (perché  $\sum_k R_k(\xi, \eta) = 1$ )
- c) soddisfa la proprietà detta *convex-hull* (perché  $\sum_k R_k(\xi, \eta) = 1$  e  $R_k(\xi, \eta) \geq 0$ )
- d) le proprietà di continuità e differenziabilità seguono da quelle delle funzioni di miscelamento

## 2.3 Utilizzo delle PB-spline come funzioni di forma per elemento finito

Le proprietà da a)-d) nel paragrafo precedente, sono importanti anche in relazione all'utilizzo delle PB-spline come funzioni di forma per la definizione di un elemento finito. La proprietà a) assicura la linearità del funzionale (1.36). La b) assicura la possibilità di modellare i modi di corpo rigido se è utilizzato l'approccio isoparametrico. La c) assicura che il campo di spostamento sia limitato dall'involuppo convesso dei suoi pdc, limitando il fenomeno di oscillazione polinomiale (fenomeno di Runge). Infine la d) assicura la continuità richiesta dal campo di spostamento nota quella delle funzioni di miscelamento.

L'utilizzo delle PB-spline come funzioni di forma per un'analisi strutturale fornisce la libertà, come la maggior parte dei metodi meshless [31], di ottimizzare la distribuzione dei gdl rispettando automaticamente la compatibilità degli spostamenti. Al contempo, ci sono almeno tre inconvenienti che rendono complicato o computazionalmente sconsigliato l'utilizzo delle PB-spline:

1. non esiste la nozione di *elemento*, i.e. una partizione del dominio su cui una ben definita regola di integrazione numerica possa essere efficacemente utilizzata.
2. non è ancora stato proposto un algoritmo di *raffinamento*, i.e. una serie di operazioni che permettano di aggiungere pdc lasciando invariata la geometria.

3. la lineare indipendenza delle funzioni di miscelamento non è assicurata (dovrebbero essere una base dello spazio degli elementi finiti).

Sederberg *et al.* risolsero alcuni problemi (in ambito CAGD) delle PB-spline introducendo le T-spline [30,32]: queste sono delle funzioni PB-spline a cui vengono imposte delle relazioni tra i vettori dei nodi associati ad ogni pdc. I vettori dei nodi di ogni pdc vengono ricavati da un reticolo nello spazio parametrico, in cui sono permesse giunzioni a T (*T-mesh*). Le funzioni T-spline sono state positivamente utilizzate come base per l'analisi in [33-34]. Tuttavia, il loro utilizzo ha i seguenti problemi non risolti:

- il raffinamento [32] non è davvero locale: l'algoritmo talvolta inserisce alcuni pdc solo per mantenere i vincoli topologici dovuti alla T-mesh [33].
- presenza di *extraordinary points*: il comportamento di un modello agli EF vicino tali punti non è stato ancora studiato [34].
- la valutazione delle funzioni T-spline può risultare computazionalmente onerosa.

Seguendo l'idea di base delle T-spline, si è cercato di vincolare la distribuzione delle PB-spline sul dominio parametrico, cercando però di coniugare i benefici sia delle PB-spline che delle funzioni B-spline tensoriali.

## 2.4 Elemento finito shell ibrido

Il maggior beneficio derivante dall'utilizzo delle PB-spline, come funzioni di base per definire un elemento finito, consiste nella libertà di distribuire le funzioni sul dominio parametrico. D'altra parte, i principali vantaggi nell'impiego delle funzioni B-spline sono:

1. possibilità di applicare il metodo di quadratura di Gauss-Legendre grazie alla presenza delle celle di integrazione;
2. esistenza di algoritmi stabili e testati;
3. memorizzazione compatta dei dati e valutazione economica delle funzioni grazie alla struttura tensoriale: per valutare  $(m \cdot n)$  funzioni B-spline bivariate è sufficiente calcolare  $(m + n)$  funzioni monovariate.

Nel tentativo di coniugare gli aspetti positivi di entrambe le formulazioni, è stato definito un elemento ibrido utilizzando l'espressione di una superficie PB-spline: le funzioni di miscelamento vengono calcolate utilizzando dei vettori dei nodi estrapolati da quelli di una opportuna patch B-spline (in seguito *patch di base*) o da vettori dei nodi da questi ultimi.

In particolare, la geometria della superficie media dell'elemento ibrido è definita dalla seguente equazione:

$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^l \mathbf{P}_k \cdot R_k^{pq}(\xi, \eta) = \frac{\sum_{k=1}^l \mathbf{P}_k \cdot B_k^{pq}(\xi, \eta)}{\sum_{k=1}^l B_k^{pq}(\xi, \eta)} \quad (\xi, \eta) \in [0,1] \times [0,1] \quad (2.12)$$

Viene diviso il contributo dei pdc interni e di quelli sui bordi:

$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = \frac{\sum_{r=1}^{l_{\text{INTERNI}}} \mathbf{P}_r \cdot B_r^{pq}(\xi, \eta) + \sum_{s=1}^{l_{\text{BORDO}}} \mathbf{P}_s \cdot B_s^{pq}(\xi, \eta)}{\sum_{k=1}^l B_k^{pq}(\xi, \eta)} \quad (\xi, \eta) \in [0,1] \times [0,1] \quad (2.13)$$

dove  $l = l_{\text{INTERNI}} + l_{\text{BORDI}}$ .

Per quanto riguarda i pdc interni, sia  $l_{\text{INTERNI}} = (m-2) \cdot (n-2)$  e siano

$$\mathbf{H}^b = \{h_1^b, \dots, h_{m+p+1}^b\}$$

e

$$\mathbf{G}^b = \{g_1^b, \dots, g_{n+q+1}^b\}$$

i vettori dei nodi della *patch di base*. Da questi definiamo i vettori dei nodi

$$\mathbf{H}^{\text{INT}} = \{h_1^{\text{INT}}, \dots, h_i^{\text{INT}}, \dots, h_{m+p-1}^{\text{INT}}\} = \{h_2^b, \dots, h_{m+p}^b\}$$

e

$$\mathbf{G}^{\text{INT}} = \{g_1^{\text{INT}}, \dots, g_j^{\text{INT}}, \dots, g_{n+q-1}^{\text{INT}}\} = \{g_2^b, \dots, g_{n+q}^b\}$$

Si ha che la generica funzione  $B_r^{pq}(\xi, \eta)$ , dove

$$r = (n-2) \cdot (i-1) + j \quad (2.14)$$

con  $i = 1, \dots, m-2$  e  $j = 1, \dots, n-2$ , viene calcolata utilizzando i vettori dei nodi

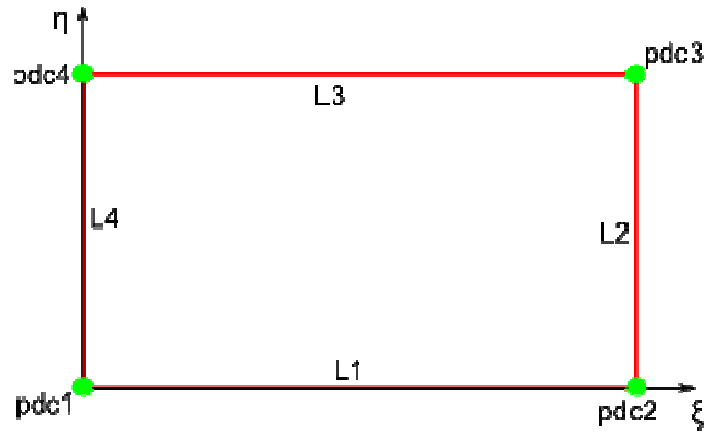
$$\mathbf{H}_r = \{h_i^{\text{INT}}, \dots, h_{i+p+1}^{\text{INT}}\} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{G}_r = \{g_j^{\text{INT}}, \dots, g_{j+q+1}^{\text{INT}}\} \quad (2.16)$$



Per quanto riguarda i pdc sul bordo, non è fissato un vincolo superiore per  $l_{BORDI}$  ma solo un vincolo inferiore che verrà posto tramite i vettori dei nodi. Poiché tutte le funzioni corrispondenti ai pdc interni sono nulle sui bordi, questi ultimi sono descritti da quattro curve. Si denota con (Figura 2.3):

- $L1$  il bordo corrispondente a  $\eta = 0$
- $L2$  il bordo corrispondente a  $\xi = 1$
- $L3$  il bordo corrispondente a  $\eta = 1$
- $L4$  il bordo corrispondente a  $\xi = 0$



**Figura 2.3:** nell'elemento ibrido si ammette una diversa parametrizzazione per i pdc sui bordi e per quelli interni. La superficie interpola i quattro pdc in cui i bordi si intersecano.

$L1$  e  $L3$  sono due curve B-spline (variabili con  $\xi$ ) definite sui vettori dei nodi rispettivamente  $\mathbf{H}^{L1} \supseteq \mathbf{H}^b$  e  $\mathbf{H}^{L3} \supseteq \mathbf{H}^b$ . Poiché  $\mathbf{H}^{L1}$  e  $\mathbf{H}^{L3}$  sono sovra-insiemi di  $\mathbf{H}^b$  (ottenuti, per esempio tramite operazione di knot-refinement) è imposto un vincolo sul numero minimo di pdc sui bordi  $L1$  e  $L3$ : le curve devono essere descritte da almeno  $m$  pdc. Analogamente,  $L2$  e  $L4$  sono due curve B-spline (variabili con  $\eta$ ) definite sui vettori dei nodi rispettivamente  $\mathbf{G}^{L2} \supseteq \mathbf{G}^b$  e  $\mathbf{G}^{L4} \supseteq \mathbf{G}^b$ : devono essere descritte da almeno  $n$  pdc.

Poiché ai pdc sono in realtà associate funzioni bivariate, è necessario definire anche i vettori dei nodi per le direzioni parametriche mancanti. Per i punti comuni a due bordi il dominio di influenza è univocamente definito: per  $pdc1$ , ad esempio (Figura 2.3), il dominio di influenza

è univocamente definito dai primi  $(p+2)$  elementi di  $\mathbf{H}^{L1}$  e dai primi  $(q+2)$  elementi di  $\mathbf{G}^{L4}$ .

Per gli altri punti si ha:

$$\mathbf{G}^{L1} = \{g_1^b, \dots, g_{q+2}^b\}$$

$$\mathbf{G}^{L3} = \{g_n^b, \dots, g_{n+q+1}^b\}$$

$$\mathbf{H}^{L4} = \{h_1^b, \dots, h_{p+2}^b\}$$

$$\mathbf{H}^{L2} = \{h_m^b, \dots, h_{m+p+1}^b\}$$

In tal modo si è univocamente definito il dominio di influenza di ogni pdc nell'espressione (2.12).

Partendo dall'espressione (2.12) della superficie media e applicando la procedura di interpolazione delle normali (paragrafo 1.2) si ottiene la descrizione della geometria dell'elemento guscio:

$$\mathbf{S}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^l R_k^{pq}(\xi, \eta) \left( \mathbf{P}_k^M + \frac{\zeta t_k}{2} \mathbf{v}_k^3 \right) \quad (2.17)$$

In conseguenza dell'ipotesi di isoparametricità il campo di spostamento è:

$$\mathbf{d}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^l R_k^{pq}(\xi, \eta) \left( \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} + \frac{\zeta t_k}{2} [-\mathbf{v}_k^2 \quad \mathbf{v}_k^1] \begin{Bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix} \right) \quad (2.18)$$

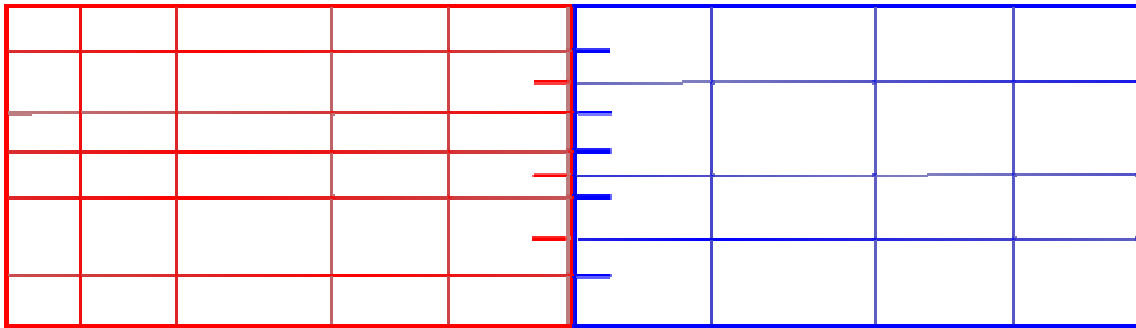
Il resto delle equazioni e le espressioni delle matrici (1.52)-(1.56) sono formalmente identiche e non verranno ripetute.

## 2.5 Collegamento di patch B-spline e integrazione numerica

Se due patch B-spline hanno un bordo con la stessa forma geometrica ma con diversa parametrizzazione, è possibile collegarle lungo tale bordo senza aumentare il numero dei pdc (quindi dei gdl per l'elemento finito corrispondente) all'interno del dominio utilizzando l'elemento ibrido definito nel paragrafo precedente.

Infatti, considerando le patch B-spline scritte in forma (2.13), il contributo dei pdc interni è diviso da quello sui bordi: è possibile utilizzare l'algoritmo di knot-refinement su un singolo bordo, considerato come curva (impiegando, a seconda del bordo, i vettori dei nodi  $\mathbf{H}^{L1}$ ,  $\mathbf{H}^{L3}$ ,  $\mathbf{G}^{L2}$  oppure  $\mathbf{G}^{L4}$ ), per ottenere la stessa parametrizzazione (i.e. uno stesso vettore dei nodi) sui bordi da collegare (Figura 2.4). Successivamente si può ricostruire il dominio di influenza bidimensionale di ogni pdc, come descritto nel paragrafo precedente.

In tal modo, inoltre, si mantiene inalterata la presenza delle celle di integrazione delle patch B-spline di partenza: è possibile utilizzare il metodo di integrazione numerica di Gauss-Legendre.



**Figura 2.4:** nell'elemento ibrido non è presente un aumento dei gdl quando due patch con diversa parametrizzazione interna vengono unite.

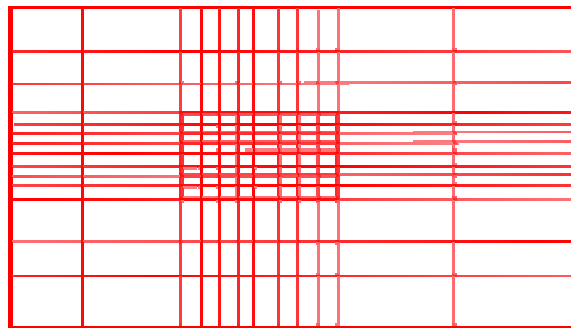
## Capitolo 3 MODELLAZIONE DI EFFETTI LOCALI

### 3.1 Introduzione

Utilizzando un elemento finito B-spline, l'aumento locale di gdl, per mezzo dell'operazione di knot-refinement, può produrre un aumento di gdl anche in zone del dominio dove non sia richiesto. Ciò a causa degli stessi motivi esposti nel paragrafo 2.1. Per permettere un aumento locale dei gdl, è stata considerata la possibilità, per l'elemento ibrido definito nel paragrafo 2.4, di aggiunta di una patch locale formata da  $R = mR \times nR$  funzioni. Tale possibilità ha condotto a ridefinire la procedura di integrazione numerica.



**Figura 3.1:** patch B-spline. In evidenza una zona centrale del dominio in cui si desidera aggiungere funzioni.



**Figura 3.2:** aumento dei gdl anche al di fuori della zona evidenziata a causa dell'utilizzo dell'algoritmo di knot-refinement.

### 3.2 Aumento locale dei gradi di libertà nell'elemento ibrido

Al fine di aumentare localmente il numero di gdl di un elemento ibrido, è possibile aggiungere altre  $R = mR \times nR$  funzioni PB-spline alle espressioni (2.17) e (2.18):

$$\mathbf{S}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{l+R} R_k^{pq}(\xi, \eta) \left( \mathbf{P}_k^M + \frac{\zeta t_k}{2} \mathbf{v}_k^3 \right) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{d}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{l+R} R_k^{pq}(\xi, \eta) \left( \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} + \frac{\zeta t_k}{2} [-\mathbf{v}_k^2 \quad \mathbf{v}_k^1] \begin{Bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{Bmatrix} \right) \quad (3.2)$$

Tali funzioni sono definite sul dominio  $\Omega^R = [\xi_0^R, \xi_1^R] \times [\eta_0^R, \eta_1^R] \subset [0,1] \times [0,1]$ . I vettori dei nodi per queste funzioni possono essere estrapolati (similmente a come fatto nel Paragrafo 2.2) dai vettori dei nodi:

$$\mathbf{H}^R = \{h_1^R, \dots, h_{mR+p+1}^R\}$$

$$\mathbf{G}^R = \{g_1^R, \dots, g_{nR+q+1}^R\}$$

dove  $h_1^R = \xi_0^R$ ,  $h_{mR+p+1}^R = \xi_1^R$ ,  $g_1^R = \eta_0^R$  e  $g_{nR+q+1}^R = \eta_1^R$ . La terna  $(\mathbf{v}_k^1, \mathbf{v}_k^2, \mathbf{v}_k^3)$ , i coefficienti  $t_k$  e i pdc  $\mathbf{P}_k^M$  possono essere calcolati tramite la procedura di interpolazione vista nel Paragrafo 2.2. Nelle (3.1) e (3.2) è stato assunto che le  $R$  funzioni definite su  $\Omega^R$  e le  $l$  funzioni definite su  $[0,1] \times [0,1]$  avessero lo stesso grado.

### 3.3 Integrazione numerica

Sia per l'elemento finito B-spline (Capitolo 1) sia per quello ibrido (quando utilizzato per collegare due patch B-spline; si veda paragrafo 2.5) i vettori dei nodi possono essere utilizzati per definire le celle di integrazione su cui applicare una regola di integrazione efficiente come quella di Gauss-Legendre. Tuttavia, quando la tecnica vista nel paragrafo precedente viene utilizzata per aumentare localmente il numero di funzioni PB-spline, la definizione delle celle di integrazione non è più immediata (Figura 3.3) e si rende necessario definire un'alternativa per ottenere una stima sufficientemente accurata degli integrali. L'utilizzo di metodi di integrazione numerica adattativi (come, ad esempio, quelli utilizzati nei metodi meshless

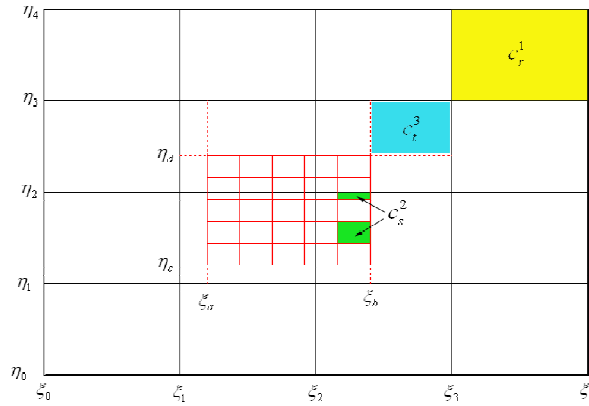
[31]), sebbene ottimizzino il numero di valutazioni necessarie, sono stati considerati troppo dispendiosi computazionalmente. È stata considerata la possibilità di utilizzare regole di ordine elevato sulle celle di integrazione definite dai vettori dei nodi  $\mathbf{H}^b$  e  $\mathbf{G}^b$  della patch di base. Tale tecnica non ha condotto a risultati soddisfacenti.

Per cercare di migliorare il processo di integrazione numerica, si è deciso di definire una partizione del dominio  $\Omega = [h_1, h_{m+p+1}] \times [g_1, g_{n+q+1}]$ : l'utilizzo di regole di Gauss di ordine adeguato su ogni elemento di tale partizione può essere un modo per meglio distribuire i punti di Gauss sul dominio di integrazione.

Considerata una patch di base le cui funzioni sono definite su  $\Omega$  tramite i vettori dei nodi  $\mathbf{H} = \{h_1, \dots, h_{m+p+1}\}$  e  $\mathbf{G} = \{g_1, \dots, g_{n+q+1}\}$ , le celle di integrazione  $\Omega_{ij} = [h_i, h_{i+1}] \times [g_j, g_{j+1}]$  sono un ricoprimento di  $\Omega$ . Definendo l'operatore partizione  $\otimes$ , si può scrivere

$$\Omega = \{\mathbf{H} \otimes \mathbf{G}\} = \{\Omega_{ij}; i = 1, \dots, m+p; j = 1, \dots, n+q\}.$$

Si desidera aggiungere sul dominio  $\Omega^R = [\xi_0^R, \xi_1^R] \times [\eta_0^R, \eta_1^R] \subset [0,1] \times [0,1]$  ulteriori funzioni definite tramite i vettori dei nodi  $\mathbf{H}^R = [h_1^R, \dots, h_{mR+p+1}^R]$  e  $\mathbf{G}^R = [g_1^R, \dots, g_{nR+q+1}^R]$ .



**Figura 3.3:** reticolo base (in nero) e reticolo locale (in rosso). Evidenziate in giallo, verde ed azzurro alcune celle, rispettivamente,  $c_r^1$ ,  $c_s^2$  e  $c_t^3$ .

Siano:

$$h^{MN} = \max \{h_i \in \mathbf{H} : h_i \leq h_1^R\}$$

$$h^{MAX} = \min \{ h_i \in \mathbf{H} : h_i \geq h_{mR+p+1}^R \}$$

$$g^{MIN} = \max \{ g_i \in \mathbf{G} : g_i \leq g_1^R \}$$

$$g^{MAX} = \min \{ g_i \in \mathbf{G} : g_i \geq g_{nR+q+1}^R \}$$

e definiti dei vettori di nodi di servizio

$$\mathbf{H}^S = \{ h_i \in \mathbf{H} : h^{MIN} \leq h_i \leq h^{MAX} \}$$

$$\mathbf{G}^S = \{ g_i \in \mathbf{G} : g^{MIN} \leq g_i \leq g^{MAX} \}$$

si definisco le celle:

$$\{c_r^1\} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{G} - \mathbf{H}^E \otimes \mathbf{G}^E$$

$$\{c_s^2\} = \{ \mathbf{H}^R + \mathbf{H}^E - \{h^{MIN}, h^{MAX}\} \} \otimes \{ \mathbf{G}^R + \mathbf{G}^E - \{g^{MIN}, g^{MAX}\} \}$$

$$\{c_t^3\} = \{ \mathbf{H}^E + \mathbf{H}^R \} \otimes \{ \mathbf{G}^E + \mathbf{G}^R \} - \{c_s^2\}$$

È in tal modo possibile utilizzare una differente regola di quadratura su ogni cella  $c_r^1, c_s^2, c_t^3$ .

### 3.4 Risultati numerici

Sono stati effettuate alcune simulazioni numeriche per testare l'elemento ibrido proposto.

Le simulazioni hanno riguardato analisi statiche di componenti con intagli, col fine di cogliere con sufficiente approssimazione le concentrazioni di tensioni previste. Inoltre è stata effettuato anche un test sulle vibrazioni libere di una piastra romboidale incastrata su di un lato: è prevista una singolarità a causa della presenza di un angolo acuto piccolo in prossimità del lato incastrato.

#### 3.4.1 Piastra quadrata con foro sottoposta ad un carico di trazione monoassiale.

È stata effettuata un'analisi statica di una piastra quadrata sottoposta ad un carico di trazione in direzione dell'asse x

Sono stati utilizzati i seguenti parametri:

Modulo di Young  $E = 10^5 \text{ N} / \text{m}^2$ ;

Coefficiente di Poisson  $\nu = 0.3$ ;

Lunghezza lato piastra  $l = 24 \text{ m}$ ;

Raggio foro  $r = 2 \text{ m}$ ;

Spessore piastra  $t = 0.01 \text{ m}$ .

In prossimità della condizione  $l / (2r) > 5$ , la soluzione è approssimabile a quella di una piastra infinita che è nota analiticamente [31] e che prevede un fattore di intensificazione degli sforzi pari a 3 vicino il foro.

Sfruttando la simmetria è stato modellato solo un quarto della piastra con due patch B-spline di quarto grado (Figura 3.4): la continuità del campo di spostamento tra le due patch è di tipo  $C^0$ . Ogni patch ha  $N=25$  pdc ed i vettori dei nodi sono  $\mathbf{H} = \mathbf{G} = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1\}$

Al modello EF corrispondente sono state applicate le seguenti condizioni al contorno:

$$d_x(x=0, y, z) = 0$$

$$d_y(x, y=0, z) = 0$$

$$d_z(x, y, z) = 0$$

È stato quindi applicato un carico di trazione  $p = 1 \text{ N} / \text{m}$  sul lato destro del modello in direzione  $x$ . L'andamento della tensione risultante  $\sigma_{xx}$  in direzione  $x$  è riportato in Figura 3.5: si noti che l'andamento globale è ben approssimato già con il modello non raffinato, tuttavia il valore della tensione vicino il foro è più alto di quello atteso.

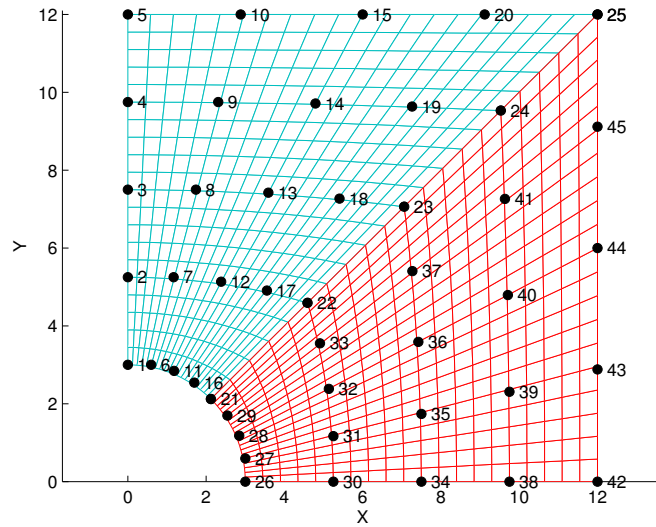
Per meglio cogliere il comportamento locale delle tensioni, è stata sovrapposto un reticolo formato da  $M = 5 \cdot 5$  funzioni PB-spline (Figura 3.6) i cui vettori dei nodi sono stati estratti dai seguenti:

$$\mathbf{H}^R = \{0.8, 0.833, 0.866, 0.9, 0.933, 0.966, 1, 1, 1, 1\}$$

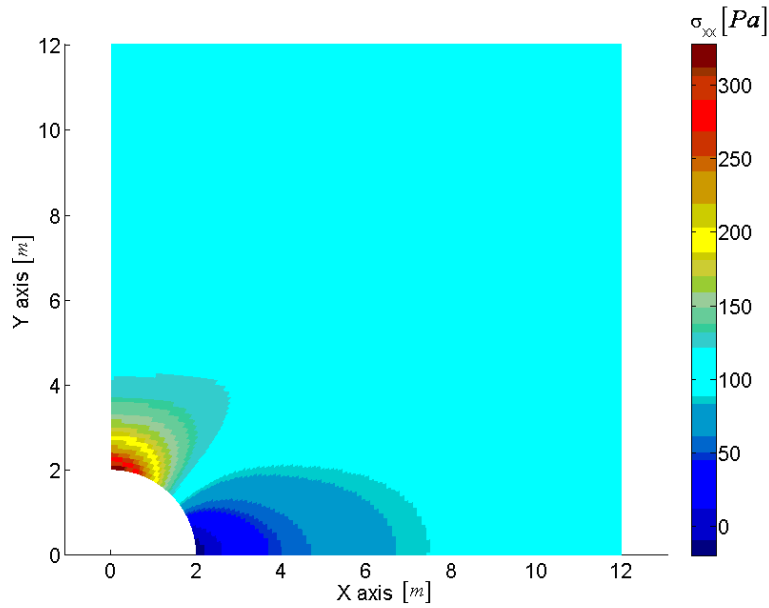
$$\mathbf{G}^R = \{0, 0, 0, 0, 0.333, 0.666, 1, 1, 1, 1\}$$



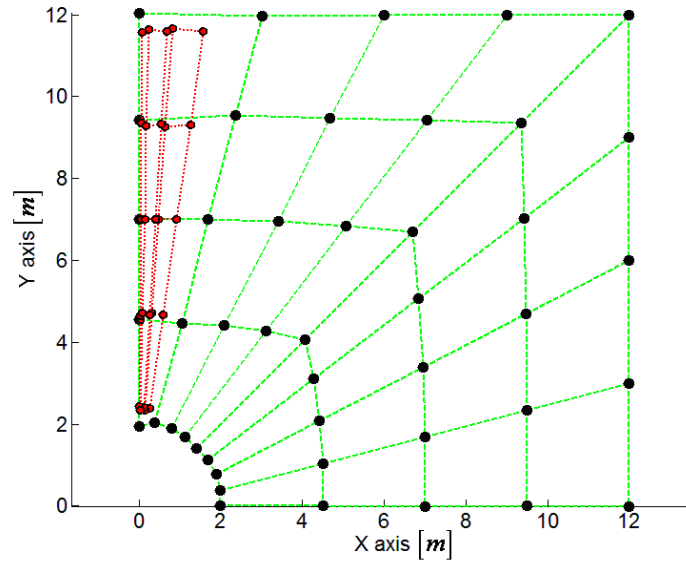
La matrice di rigidezza è stata numericamente integrata utilizzando  $5 \times 5$  punti di Gauss in ogni cella  $c_r^1, c_s^2$  and  $c_t^3$ . L'andamento, lungo il lato sinistro ( $x=0$ ) del quarto di piastra, della tensione  $\sigma_{xx}$  utilizzando tale modello è riportato in Figura 3.7.



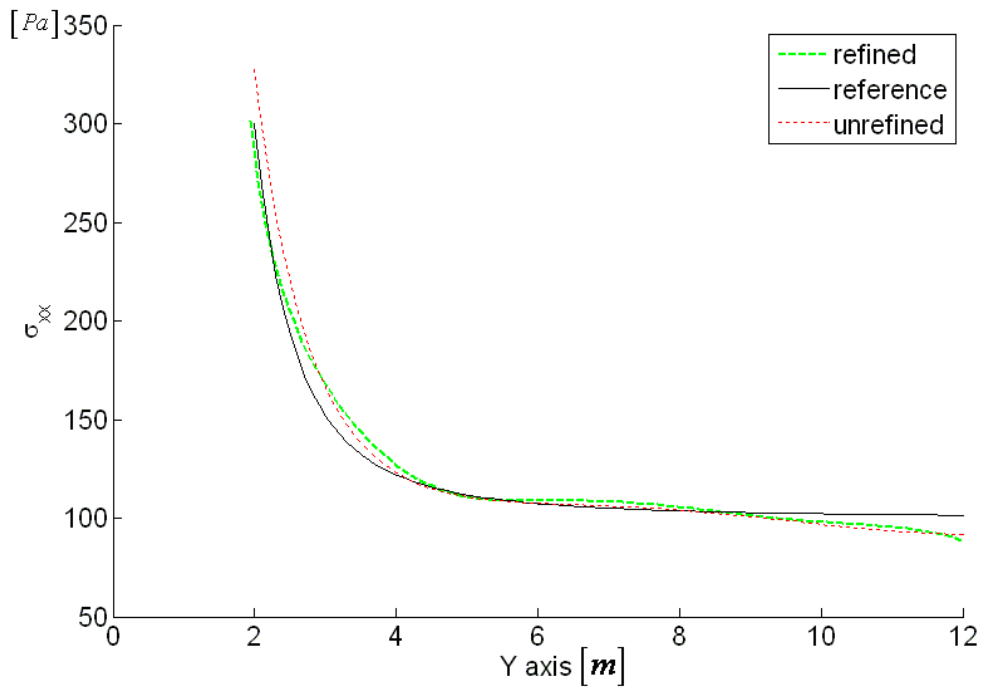
**Figura 3.4:** Modellazione di un quarto della piastra quadrata con foro centrale tramite assemblaggio di due patch.



**Figura 3.5:** rappresentazione della distribuzione delle tensioni  $\sigma_{xx}$  per la piastra quadrata modellata come in Figura 3.4



**Figura 3.6:** disegno dei pdc e dei reticoli (verde e rosso) formati dalle due patch B-spline dopo la sovrapposizione.



**Figura 3.7:** andamento della tensione  $\sigma_{xx}$  lungo il lato sinistro ( $x=0$ ) del quarto di piastra.

### 3.4.2 Piastra rettangolare incastrata con foro sottoposta ad un carico trasversale.

È stata considerata una piastra rettangolare, con un foro circolare centrale. La piastra è incastrata su un lato minore e sottoposta ad un carico costante distribuito  $P$  sull'altro lato minore (Figura 3.8).

Sono stati utilizzati i seguenti parametri:

Modulo di Young  $E = 200 \text{ GPa}$  ;

Coefficiente di Poisson  $\nu = 0.3$  ;

Lunghezza lati minori  $l_1 = 10m$  ;

Lunghezza lati maggiori  $l_2 = 16m$  ;

Raggio foro  $r = 1m$  ;

spessore  $t = 0.01m$  ;

Carico  $P = 1N / m$  .

La soluzione di riferimento è stata ottenuta con un modello ad elementi finiti con 4377 elementi guscio quadratici serendipity (un totale di 13445 nodi) tramite un codice commerciale: l'andamento della tensione  $\sigma_{xx}$  in direzione  $x$  è riportato in Figura 3.9. Inizialmente la piastra è stata modellata con quattro path B-spline (Figura 3.10): ogni patch ha  $N = 25$  pdc e vettori dei nodi  $\mathbf{H} = \mathbf{G} = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$  . Le patch sono state assemblate e al modello EF corrispondente sono state applicate le seguenti condizioni al contorno:

$$d_x(x, y, z = 0) = 0$$

$$d_y(x, y, z = 0) = 0 .$$

$$d_z(x = 0, y, z) = 0$$

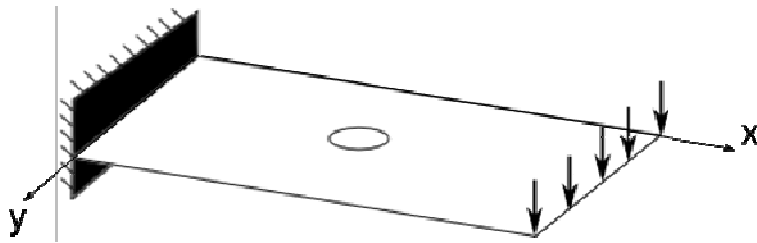
L'andamento della tensione  $\sigma_{xx}$  in direzione  $x$ , calcolato per mezzo dell'elemento finito B-spline è rappresentato in Figura 3.11: sebbene l'andamento globale sia paragonabile alla soluzione di riferimento (Figura 3.9), la tensione massima in prossimità del foro è sottostimata.

Una soluzione di dettaglio è stata ottenuta aggiungendo, al modello PB-spline derivato dal precedente, un insieme di  $M = 5 \cdot 5$  funzioni definite sulla patch 1 (Figura 3.10) per mezzo dei vettori dei nodi:

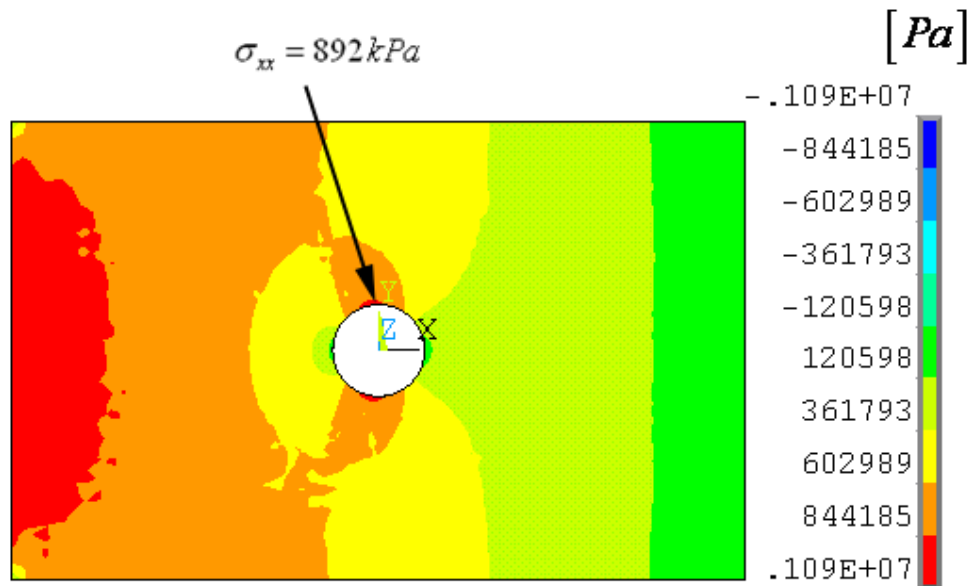
$$\mathbf{H}^R = \{0, 0, 0, 0, 0.066, 0.133, 0.2, 0.266, 0.333, 0.4\}$$

$$\mathbf{G}^R = \{0, 0, 0, 0, 0.333, 0.667, 1, 1, 1, 1\}.$$

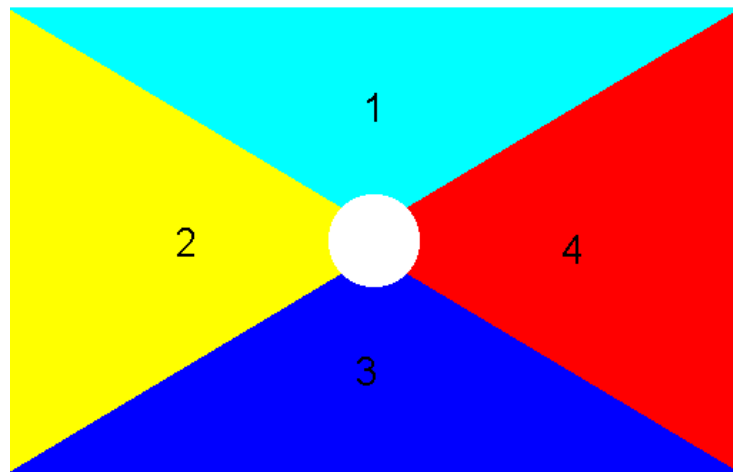
L'arrangiamento dei pdc dopo il processo di interpolazione è mostrato in Figura 3.12. La matrice di rigidezza è stata integrata numericamente utilizzando  $5 \times 5$  in ogni cella di integrazione (come definite nel paragrafo 3.3). La tensione  $\sigma_{xx}$  massima in prossimità del foro calcolata con tale discretizzazione è  $\sigma_{xx} \approx 872 \text{ kPa}$ .



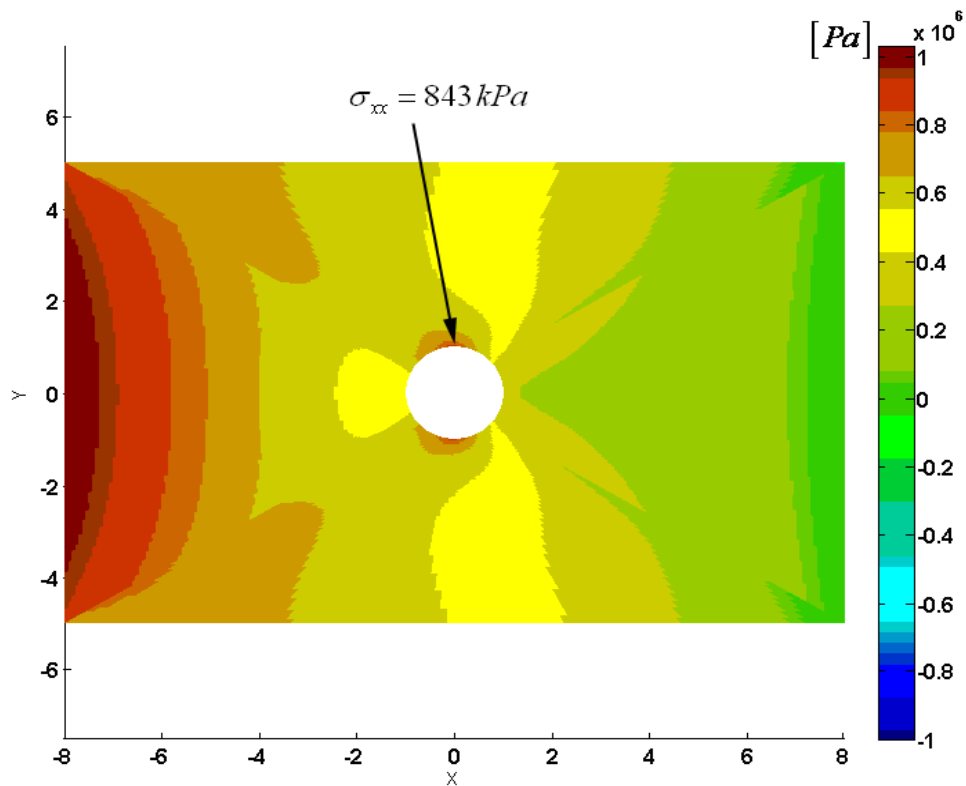
**Figura 3.8:** piastra rettangolare con foro centrale, incastrata su di un lato e sottoposta ad un carico distribuito sull'altro lato.



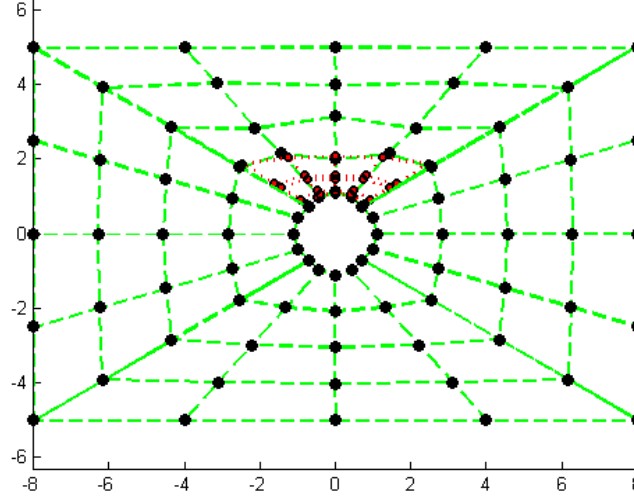
**Figura 3.9:** andamento della tensione  $\sigma_{xx}$  per la piastra rettangolare ottenuta tramite codice commerciale ad elementi finiti.



**Figura 3.10:** identificazione delle quattro patch con cui è stata modellata la piastra forata.



**Figura 3.11:** andamento della tensione  $\sigma_{xx}$  per la piastra rettangolare modellata mediante quattro patch B-spline collegate sui bordi comuni.



**Figura 3.12:** reticolo e punti di controllo dopo l'aggiunta delle funzioni locali (reticolo rosso).

### 3.4.3 Vibrazioni libere di una piastra con geometria romboidale.

L'esempio numerico riguarda le vibrazioni libere di una piastra romboidale moderatamente spessa, incastrata su di un lato (Figura 3.13). All'aumentare dell'angolo di inclinazione  $\beta$ , la presenza dell'incastro genera elevati gradienti degli spostamenti che richiedono un elevato numero di gdl per essere rappresentati [35]. La geometria della piastra è definita dalle seguenti grandezze:

$$\begin{aligned} a &= 1m ; \\ \beta &= 60^\circ ; \\ t &= 0.1m, \end{aligned}$$

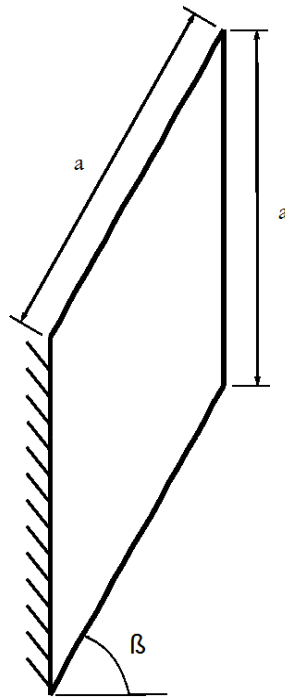
dove  $t$  è lo spessore della piastra. Gli effetti della deformazione di taglio e dell'inerzia della sezione alla rotazione devono essere considerati a causa del valore  $a/t = 10$  che non permette di utilizzare la teoria di Kirchhoff.

La piastra è stata inizialmente modellata tramite una patch con  $5 \times 5$  funzioni B-spline del quarto ordine (Figura 3.14). I risultati numerici ottenuti con tale modello sono riportati nell'ultima colonna in Tabella 3.1, insieme ad alcuni risultati di riferimento [35-37], utilizzando il parametro adimensionale  $\lambda_i$ :

$$\lambda_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho t / D} \quad (3.3)$$

dove  $\omega_i$  è la pulsazione natural  $i$ -esima,  $D$  è la rigidezza flessionale e  $\rho$  è la densità di massa del materiale. tutti i risultati sono stati ottenuti per un materiale con coefficiente di Poisson  $\nu = 0.3$ .

In Tabella 3.1 è anche riportata la soluzione ottenuta con un codice ad elementi finiti commerciale utilizzando 1600 elementi finiti shell con funzioni polinomiali quadratiche (serendipity). Per considerare solo la flessione della piastra sono stati vincolati gli spostamenti non trasversali ottenendo così un modello con 4961 gdl (3 gdl per nodo).



**Figura 3.13:** piastra romboidale incastrata su di un lato

L'andamento dell'approssimazione delle prime quattro frequenze naturali della piastra è stato investigato generando dei modelli con un numero crescente  $M^R = m^R \times n^R$  ( $m^R = n^R = 8, 10, 12, 14$ ) di funzioni, definite sul dominio parametrico  $[0, 0.6] \times [0, 1]$ , cioè in prossimità del lato incastrato, per tutta la sua lunghezza. Le matrici di massa e di rigidezza sono state numericamente integrate utilizzando  $5 \times 5$  punti di Gauss nelle celle di tipo  $c_r^1$  e  $c_t^3$ ; è stato inoltre indagato l'utilizzo dell'ordine di integrazione utilizzando due regole

diverse nelle celle di tipo  $c_s^2$ : i risultati ottenuti utilizzando  $2 \times 2$  punti di Gauss in  $c_s^2$  sono riportati in Tabella 3.2, quelli ottenuti utilizzando  $3 \times 3$  punti di Gauss sono riportati in Tabella 3.3.

I risultati in Tabella 3.2 mostrano un andamento dei valori dei parametri  $\lambda_i$  crescente (convergenza dal basso) con il numero delle funzioni utilizzate in prossimità dell'incastro. I risultati in Tabella 3.3, mostrano invece un andamento opposto (convergenza dall'alto). Tutti i risultati convergono verso valori più elevate di quelli riportati in [35] e sembrano in miglior accordo con gli altri.

**Tabella 3.1:** le prime quattro colonne riportano i risultati di riferimento (primi quattro parametri  $\lambda_i$ ) per la piastra romboidale incastrata. L'ultima colonna riporta i valori ottenuti con il modello B-spline.

$\lambda_i$	Huang <i>et al.</i> [16] 222 gdl	Liew <i>et al.</i> [17] 360 gdl	McGee <i>et al.</i> [18]	FEM 14883 gdl	B-spline 75 gdl
1	4.956	5.049	5.008	5.046	5.388
2	14.90	14.90	14.96	15.08	15.57
3	26.39	27.08	27.11	27.64	31.56
4	38.25	38.33	38.41	40.40	41.23

**Tabella 3.2:** andamento dei parametri  $\lambda_i$  al variare del numero  $mR \times nR$  di funzioni locali aggiunte al modello B-spline.

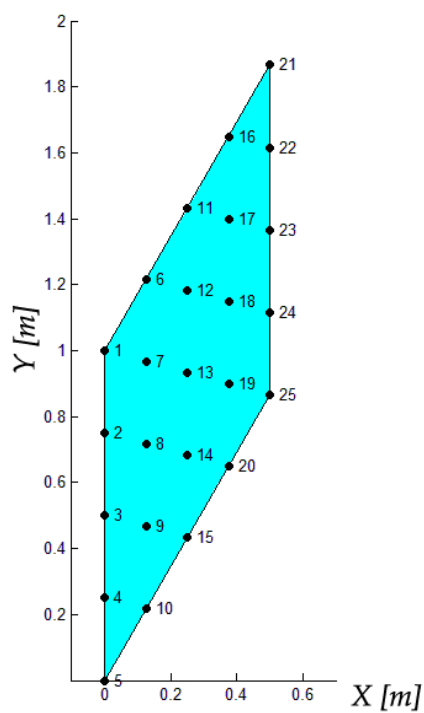
Utilizzo di  $2 \times 2$  punti di Gauss sulle celle di tipo  $c_s^2$ .

$\lambda_i \backslash mR \times nR$	8x8	10x10	12x12	14x14
1	5.074	5.085	5.087	5.088
2	14.70	14.77	14.81	14.84
3	27.51	27.65	27.71	27.74
4	38.33	38.59	38.73	38.82



**Tabella 3.3:** andamento dei parametri  $\lambda_i$  al variare del numero  $mR \times nR$  di funzioni locali aggiunte al modello B-spline.  
Utilizzo di  $3 \times 3$  punti di Gauss sulle celle di tipo  $c_s^2$ .

$\lambda_i \backslash mR \times nR$	$8 \times 8$	$10 \times 10$	$12 \times 12$	$14 \times 14$
1	5.180	5.155	5.142	5.135
2	15.12	15.09	15.07	15.06
3	28.18	28.10	28.06	28.02
4	39.47	39.41	39.37	39.35



**Figura 3.14:** modellazione della piastra romboidale con una singola patch B-spline formata da  $5 \times 5$  pdc

## Capitolo 4 ELEMENTO FINITO SHELL PER COMPONENTI IN MATERIALE COMPOSITO LAMINATO

### 4.1 Introduzione

La formulazione sviluppata nei capitoli precedenti è stata estesa alla modellazione di componenti in materiale composito laminato, con numero di strati e sequenza di laminazione qualsiasi. È stata utilizzata una teoria a *singolo strato equivalente* (ESL [39]), in luogo di una teoria *multistrato*, poiché dallo studio della letteratura disponibile è emersa l'efficacia di tale teoria nella determinazione della risposta globale di un sistema (deformazioni approssimate, carico critico di buckling, frequenze naturali e modi propri di vibrare associati, eccetera). In tal modo è stato possibile testare l'approccio proposto con un notevole risparmio computazionale rispetto all'utilizzo di una teoria multistrato.

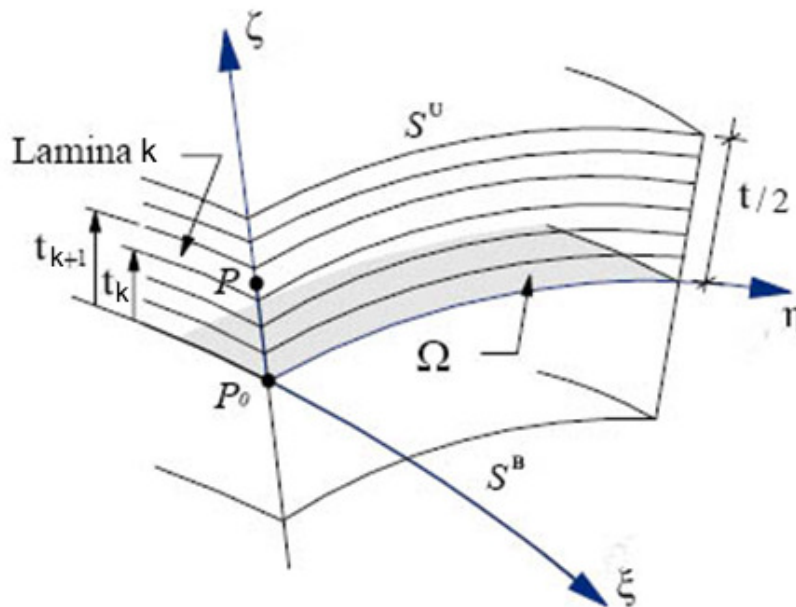


Figura 4.1: generica lamina  $k$  del composito

## 4.2 Equazioni costitutive per il laminato

Si assume che ogni lamina unidirezionale sia ortotropa rispetto alle linee di simmetria materiale e che obbedisca alla legge di Hook.

Definiamo il sistema di riferimento materiale  $(\mathbf{v}_1^{m,k}, \mathbf{v}_2^{m,k}, \mathbf{v}_3^{m,k})$  per ogni lamina  $k$ :

$\mathbf{v}_1^{m,k}$  è tangente alla superficie media della lamina e diretto nel senso delle fibre

$\mathbf{v}_3^{m,k}$  è normale alla superficie media della lamina

$$\mathbf{v}_2^{m,k} = \mathbf{v}_3^{m,k} \wedge \mathbf{v}_1^{m,k}$$

Supponiamo che tale sistema di riferimento sia definito in ogni punto del modello.

In tale sistema di riferimento la matrice di legame costitutivo per la lamina k-esima  $\Omega^k$  è:

$$\bar{\mathbf{E}}^k = \begin{bmatrix} \frac{E_1^k}{(1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k)} & \frac{\nu_{12}^k E_2^k}{(1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}^k E_2^k}{(1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k)} & \frac{E_2^k}{(1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13}^k \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

si noti che la matrice di legame ridotta al caso di tensione piana coinvolge solo 6 costanti ingegneristiche:  $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}, G_{13}, G_{23}$  [39].

La matrice di legame nel sistema di riferimento globale (x,y,z) è:

$$\mathbf{E}^k = \mathbf{T}^T \cdot \bar{\mathbf{E}}^k \cdot \mathbf{T} \quad (4.2)$$

dove  $\mathbf{T}$  è la matrice di trasformazione dal sistema di riferimento materiale a quello globale.

La matrice di rigidezza per la lamina k-esima è:

$$\mathbf{K}^k = \int_{\Omega^k} \mathbf{B}^T \mathbf{E}^k \mathbf{B} \cdot \det J \cdot d\Omega \quad (4.3)$$

e quella per il modello ESL di composito è:

$$\mathbf{K} = \sum_k \mathbf{K}^k \quad (4.4)$$

### 4.3 Risultati numerici

La prima simulazione numerica effettuata ha riguardato l'analisi di vibrazione libera di una piastra in composito laminate di tipo angle-ply. La seconda è un confronto con FRF sperimentali ottenuti in laboratorio su un provino tubolare in materiale composito.

#### 4.3.1 Piastra quadrata in laminato angle-ply

È stato effettuato uno studio delle vibrazioni libere di una piastra quadrata in materiale composito laminato di tipo angle-ply, con sequenza di laminazione  $[0^\circ/45^\circ]$ . La piastra è incastrata sui quattro lati ed ha un rapporto caratteristico  $a/t = 100$  dove  $a$  è la lunghezza del lato e  $t$  è lo spessore. Le proprietà materiali di ogni lamina sono  $E_1/E_2=25$ ,  $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$ ,  $G_{23}=0.2E_2$ ,  $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.25$ .

La Tabella 4.1 riporta i risultati di riferimento [38]: i valori dei primi otto parametri  $\bar{\omega} = \omega a \sqrt{\rho/E_2}$ , con  $\omega$  pulsazione naturale, sono stati ottenuti utilizzando una espansione degli spostamenti in serie di Fourier troncata:  $N$  denota il numero di termini utilizzato per la serie di Fourier ( $5N^2$  è il numero totale di gdl).

I parametri  $\bar{\omega}$  ottenuti con il modello proposto sono riportati nelle

Tabella 4.2-5.9: sono stati calcolati variando sia la regola di integrazione impiegata (piena/ridotta), sia il grado ( $p=q=3,4,5,6$ ) e il numero delle funzioni  $\bar{n}$  utilizzate per ogni direzione parametrica  $\xi$  e  $\eta$  ( $5\bar{n}^2$  è il numero totale di gdl utilizzati).

**Tabella 4.1:** Risultati di riferimento per il parametro  $\bar{\omega}$  [38]

$N$	1	2	3	4	5	6	7	8
4	27.684	62.047	79.932	100.72	222.05	236.41	277.98	285.81
8	23.249	38.825	55.371	59.814	72.984	85.337	101.53	104.60
10	22.592	37.349	53.429	57.702	70.255	81.701	98.376	99.681
22	21.543	35.167	50.672	54.531	66.331	76.671	93.482	93.788

**Tabella 4.2:** Risultati ottenuti con  $p=q=3$  e integrazione piena ( $4 \times 4 \times 2$ ) punti di Gauss

$\bar{n}$	1	2	3	4	5	6	7	8
7	22.349	43.394	59.622	75.039	140.789	156.205	183.314	192.227
8	22.021	38.06	54.030	66.053	86.093	105.132	120.778	133.788
9	21.928	36.508	52.361	60.823	72.754	90.293	104.229	118.480
10	21.896	35.981	51.776	57.769	69.393	84.242	98.726	111.222

**Tabella 4.3:** Risultati ottenuti con  $p=q=4$  e integrazione piena ( $5 \times 5 \times 2$ ) punti di Gauss

$\bar{n}$	1	2	3	4	5	6	7	8
7	21.921	37.374	53.673	65.992	93.162	111.683	129.404	141.139
8	21.888	36.207	52.282	60.325	72.303	90.362	105.373	119.642
9	21.876	35.799	51.640	57.410	69.280	84.074	99.525	112.196
10	21.871	35.685	51.470	56.038	67.993	80.658	96.442	103.315

**Tabella 4.4:** Risultati ottenuti con  $p=q=5$  e integrazione piena ( $6 \times 6 \times 2$ ) punti di Gauss

$\bar{n}$	1	2	3	4	5	6	7	8
7	21.898	36.208	52.443	61.336	73.810	93.392	106.461	121.196
8	21.879	35.825	51.729	57.884	69.905	85.832	101.801	115.930
9	21.871	35.688	51.498	56.435	68.440	81.793	97.569	107.051
10	21.870	35.659	51.436	55.613	67.614	79.600	95.810	101.067

**Tabella 4.5:** Risultati ottenuti con  $p=q=6$  e integrazione piena ( $7 \times 7 \times 2$ ) punti di Gauss

$\bar{n}$	1	2	3	4	5	6	7	8
7	21.893	36.062	52.362	58.277	69.989	88.512	100.362	116.207
8	21.874	35.711	51.523	56.761	68.990	82.965	99.538	107.91
9	21.870	35.664	51.455	55.769	67.815	80.276	96.115	104.01
10	21.87	35.651	51.420	55.453	67.464	78.884	95.594	98.557

**Tabella 4.6:** Risultati ottenuti con  $p=q=3$  e integrazione ridotta ( $3 \times 3 \times 2$ ) punti di Gauss

$\bar{n}$	1	2	3	4	5	6	7	8
7	22.204	41.424	57.579	72.27	132.424	147.946	173.773	182.870
8	21.980	37.493	53.513	64.899	82.238	101.440	116.555	129.883
9	21.912	36.328	52.206	60.015	71.681	88.830	102.854	117.098
10	21.888	35.911	51.713	57.383	69.069	83.526	98.276	109.751

**Tabella 4.7:** Risultati ottenuti con  $p=q=4$  e integrazione ridotta ( $4 \times 4 \times 2$ ) punti di Gauss

$\bar{n}$	1	2	3	4	5	6	7	8
7	21.917	37.248	53.564	65.722	91.255	109.985	127.317	139.257
8	21.887	36.192	52.271	60.150	72.055	90.025	105.039	119.332
9	21.875	35.794	51.634	57.373	69.253	83.977	99.498	111.944
10	21.871	35.684	51.469	56.029	67.983	80.619	96.429	103.217

**Tabella 4.8:** Risultati ottenuti con  $p=q=5$  e integrazione ridotta ( $5 \times 5 \times 2$ ) punti di Gauss

$\bar{n}$	1	2	3	4	5	6	7	8
7	21.898	36.196	52.437	61.124	73.409	92.952	105.920	120.755
8	21.879	35.823	51.724	57.865	69.890	85.787	101.783	115.891
9	21.871	35.687	51.498	56.432	68.437	81.780	97.562	107.007
10	21.870	35.659	51.436	55.611	67.612	79.596	95.808	101.063

**Tabella 4.9:** Risultati ottenuti con  $p=q=6$  e integrazione ridotta ( $6 \times 6 \times 2$ ) punti di Gauss

$\bar{n}$	1	2	3	4	5	6	7	8
7	21.869	35.749	51.668	57.799	70.113	85.436	103.411	117.751
8	21.874	35.71	51.520	56.756	68.988	82.940	99.535	107.777
9	21.870	35.664	51.455	55.768	67.813	80.273	96.112	104.007
10	21.87	35.651	51.420	55.452	67.464	78.883	95.593	98.555

I risultati mostrano una convergenza monotona verso i risultati di riferimento, aumentando il numero di gdl. Il fenomeno del locking sembra già assente utilizzando le funzioni B-spline cubiche. L'utilizzo di una regola di integrazione ridotta sembra condurre a risultati molto simili, all'aumentare del grado delle funzioni utilizzate, a quelli ottenuti con la regola piena.

#### **4.3.2 Confronto con dati sperimentali**

È stato considerato un provino tubolare in materiale composito.

Le caratteristiche geometriche del tubo sono:

- Diametro esterno: 28 (0/+0.5) mm
- Diametro interno: 24 mm
- Lunghezza: 1000 mm

La laminazione utilizzata (partendo dall'interno del tubo; 0° indica la direzione parallela all'asse del tubo):

- spessore lamina 0.31 mm, unidirezionale, fibra M23 a 90°
- spessore lamina 0.23 mm, unidirezionale, fibra P51 a 0° [6 lamine]
- spessore lamina 0.37 mm, unidirezionale, fibra M23 a 0°
- spessore lamina 0.16 mm, unidirezionale, fibra M23 a 90°

Le proprietà meccaniche delle lamine sono:

Lamine P51

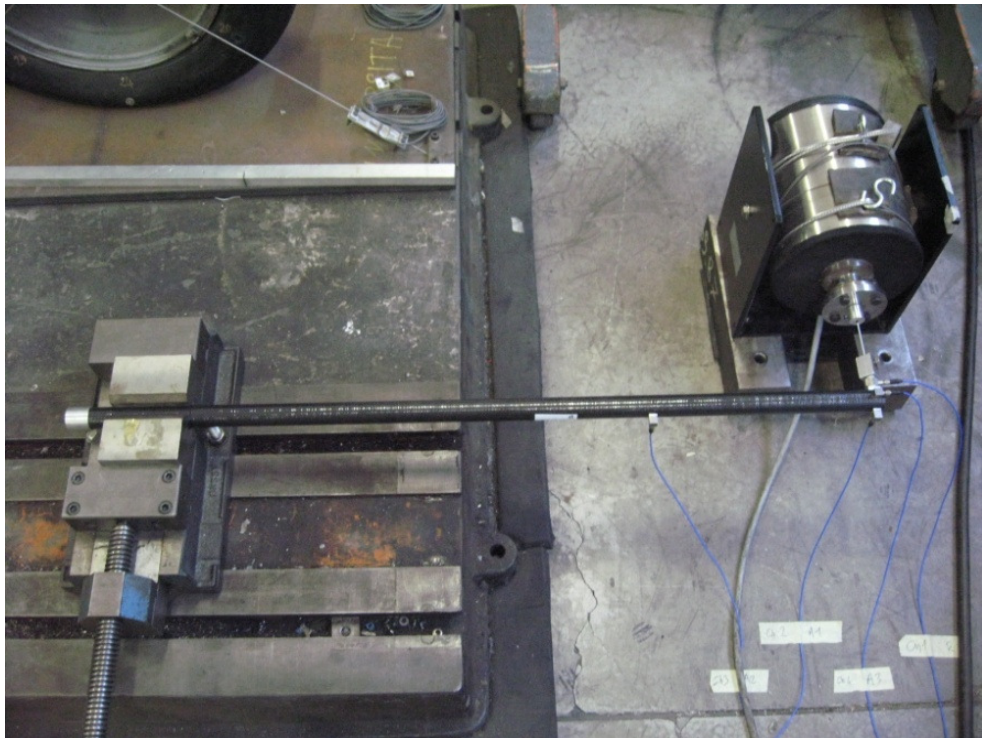
- densità fibra 2.11
- spessore lamine 0.23 mm
- modulo di Young long. 331 GPa
- modulo di Young trasversale 5.8 MPa
- modulo tangenziale 5.5 GPa
- coefficiente di Poisson 0.27 circa

Lamine M23

- densità fibra 1.8
- spessore lamine usate trasversalmente 0.16 mm

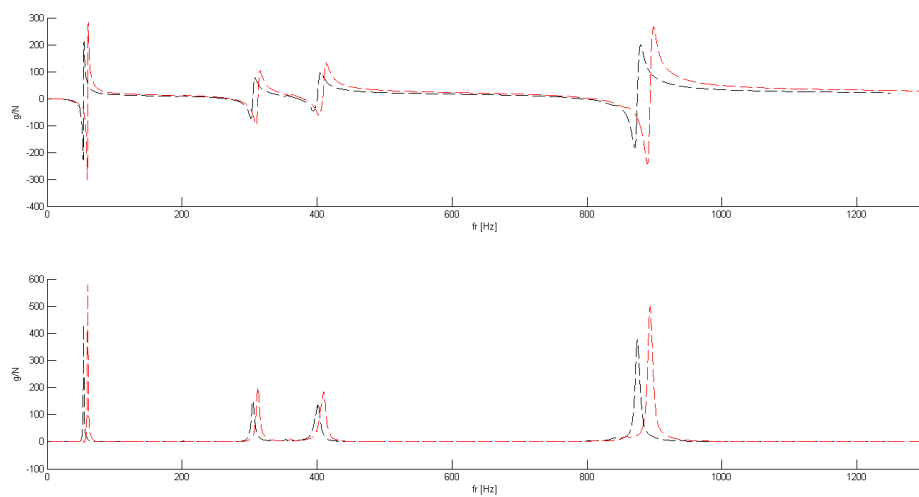
- spessore lamina usate longitudinalmente 0.37 mm
- modulo di Young long. 122 GPa
- modulo di Young trasversale 6..5 MPa
- modulo tangenziale 5.5 GPa
- coefficiente di Poisson 0.29 circa

Il tubo è stato bloccato con una morsa ad un estremo, lasciando una lunghezza libera  $L=970$  mm (Figura 4.2). Il tubo è stato attrezzato con due accelerometri piezoelettrici sull'estremo libero (in direzione parallela e perpendicolare a quella dell'eccitazione) ed uno montato a distanza  $\frac{2L}{3}$  dalla morsa. Sono state acquisite le funzioni di risposta in frequenza ed è stato effettuato il confronto delle FRF ottenute tramite misure sperimentali con quelle sintetizzate utilizzando il modello proposto (Figura 4.3).



**Figura 4.2:** esempio di set-up e attrezzatura utilizzata per le prove sperimentali





**Figura 4.3:** confronto FRF acquisite sperimentalmente (nero) e sintetizzate tramite il modello ad elemrnti finiti proposto (rosso).

## CONCLUSIONI

Nella tesi è stato considerato l'utilizzo di funzioni spline come base per lo studio, tramite il metodo degli elementi finiti, delle vibrazioni libere e forzate di componenti in parete sottile con geometria qualsiasi in materiale composito laminato.

È stato implementato un elemento finito guscio basato sulla teoria di Reissner-Mindlin con 5 gradi di libertà (gdl) generalizzati per nodo. La definizione del sistema di riferimento locale per i gdl di rotazione, a causa del carattere non interpolatorio delle B-spline, è stata effettuata facendo ricorso ad una tecnica di fitting dei vettori normali alla superficie media. Tale tecnica è stata anche utilizzata, con un minimo onere computazionale aggiuntivo, per permettere la variazione di parametri quali il numero e il grado delle funzioni B-spline utilizzate. L'effetto della variazione di tali parametri, insieme a quella del metodo di integrazione, è stata investigata al fine di verificare l'incidenza del locking. È stato riscontrato che l'utilizzo di metodi di quadratura ridotti e di funzioni di grado superiore al terzo ha il duplice vantaggio di alleviare gli effetti del locking e di diminuire il carico computazionale. La presenza di modi spuri è stata riscontrata solo quando la formulazione B-spline si riduce a quella di Bezier.

Per poter studiare componenti con forme qualsiasi è stato proposto un elemento spline ibrido che coniuga molti dei vantaggi delle formulazioni B-spline e PB-spline. L'elemento proposto permette di modellare componenti con forme non mappabili su un dominio rettangolare in modo simile a quello utilizzato con gli elementi finiti classici utilizzando l'algoritmo di inserzione nodale per le B-spline. L'elemento permette anche di variare localmente il numero di gdl utilizzati: la matrice dei coefficienti del sistema lineare generato dalla procedura di fitting dei vettori normali è stata utilizzata per sopperire alla mancanza di un algoritmo di raffinamento. L'integrazione numerica è stata effettuata partizionando il dominio di integrazione in modo da meglio distribuire i punti di Gauss. Le prove numeriche effettuate hanno mostrato buoni risultati pur segnalando la non ottimalità dei metodi di integrazione utilizzati.

Successivamente la formulazione è stata estesa alla modellazione di componenti in materiale composito laminato con numero di strati e sequenza di laminazione qualsiasi. È stata utilizzata una teoria a *singolo strato equivalente*. L'approccio è stato verificato sia tramite simulazioni numeriche sia comparando le FRF sintetizzate numericamente con quelle ottenute da prove sperimentali su un provino tubolare in materiale composito con fibra di carbonio e matrice polimerica. Tali verifiche hanno confermato l'efficacia dell'approccio proposto anche per materiali compositi laminati.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] Schoenberg, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quart. Appl. Math.*, vol. 4, pp. 45–99 and 112–141, 1946
- [2] Bohm, Farin, Kahmann. A survey of curve and surface methods in CAGD, *Computer Aided Geometric Design* 1, 1-60, 1984
- [3] Gerald Farin, *Curves and surfaces for CAGD : a practical guide* - 5. ed. - Morgan Kaufmann Publishers, 2002
- [4] Les Piegl, Wayne Tiller. *The NURBS book* - 2. ed. - Springer, 1997
- [5] Ahmad S, *Curved finite elements in the analysis of solid, shell, and plate structures*, Ph.D. Thesis, University of Wales, Swansea, 1969.
- [6] Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., Witt R.J. *Concepts and applications of finite element analysis*. Fourth Ed.. John Wiley & Sons Inc, 2002
- [7] Farin G, *Curves and Surfaces for CAGD. A Practical Guide*. Fifth Ed. Morgan Kaufmann Publishers, 2002.
- [8] Bischoff M., Wall W.A., K.U. Bletzinger, E. Ramm. *Models and finite elements for thin-walled structures*. In: E. Stein, R. De Borst, T.J.R. Hughes (Eds.), *Solids, Structures and Coupled Problems*, *Encyclopedia of computational Mechanics*, vol.2, Wiley, New York, 2004.
- [9] Press W.H., Teukolsky S.A., Wetterling W.T., Flannery B.P. *Numerical Recipes in C++: The Art of Scientific Computing*, Second Edition,. Cambridge University Press, 2002
- [10] MacNeal R.H. *Finite Element: Their Design and Performance*., Marcel Dekker Inc, 1994.
- [11] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *Finite Element Method (5th Edition) Volume 1 - The Basis*, Elsevier, 2000.

- [12] T.J.R. Hughes, A. Reali, G. Sangalli. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**, 5-8, p 301-313, January 1, 2010
- [13] Leissa AW. The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, **31**, pp. 257-293, 1973.
- [14] Lee SJ, Han SE. Free-vibration analysis of plates and shells with a nine-node assumed natural degenerated shell element. *Journal of Sound and Vibration*, **241**, pp. 605-633, 2001.
- [15] Liew KM, Lim CW. Vibratory characteristics of cantilevered rectangular shallow shells of variable thickness. *AIAA Journal*, **32**, pp. 387-396, 1994.
- [16] Liew KM, Peng LX, Ng TY. Three-dimensional vibration analysis of spherical shell panels subjected to different boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, **44**, pp. 2103–2117, 2002.
- [17] Lim CW, Liew KM, 1995, A higher order theory for vibration of shear deformable cylindrical shallow shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, **37**, 3, p 277-95, March 1995.
- [18] Ochoa O.O., Reddy J.N. Finite element analysis of composite laminates. Kluwer Academic Publisher, 1992.
- [19] T.J.R. Hughes, A. Reali, G. Sangalli. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**, 5-8, p 301-313, January 1, 2010
- [20] Y. Leino, J. Pitkäranta, On the membrane locking of h-p finite elements in a cylindrical shell problem, *Int. J. Numer. Meth. Engrg*, **37**, pp.1053-1070, 1994.

- [21] J. Pitkäranta, Y. Leino, O. Ovaskainen, J. Piila, Shell deformation states and the finite element method: A benchmark study of cylindrical shells, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **128**, pp. 81-121, 1995.
- [22] H. Hakula, Y. Leino, J. Pitkäranta, Scale resolution, locking, and high-order finite element modelling shells, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **133**, 157-182, 1996.
- [23] C. Chinosi, L. Della Croce, T. Scapolla, Hierarchic finite elements for thin Naghdi shell model, *Int. J. Solids Struct.* **35**, 1863-1880, 1998.
- [24] J.P. Pontaza, J.N. Reddy, Mixed plate bending elements based on least-squares formulation, *Int. J. Numer. Meth. Engrg*, **60**, 891-922, 2004.
- [25] R. A. Arciniega, On A Tensor-Based Finite Element Model For The Analysis Of Shell Structures, Ph.D. Thesis, Texas A&M University, 2005.
- [26] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry, and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**, pp. 4135–4195, 2005.
- [27] Cottrell, J.A., Hughes T.J.R., Reali A., Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **196**, 41-44, p 4160-83, 1 Sept. 2007
- [28] Mazure M., B-Spline Bases And Osculating Flats: One Result Of H.-P. Seidel Revisited. *M2AN*, **36**, 6, pp. 1177–1186, 2002.
- [29] P. Kagan, A. Fischer, and P. Z. Bar-Yoseph. Mechanically based models: Adaptive refinement for B-spline finite element. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **57**, pp. 1145–1175, 2003.
- [30] T.W. Sederberg, J. Zheng, A. Bakenov and A. Nasri: T-splines and T-NURCCS, *ACM Transactions on Graphics*, **22**, 3, pp. 477-484, 2003.

- [31] Liu G.R. Mesh free methods : moving beyond the finite element method. CRC Press LLC, 2003.
- [32] T.W. Sederberg, D.L. Cardon, G.T. Finnigan, N.S. North, J. Zheng and T. Lyche: T-spline Simplification and Local Refinement, *ACM Transactions on Graphics*, **23**, 3, 2004.
- [33] Michael R. Dörfel, Bert Jüttler, Bernd Simeon. Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**, 5-8, 1January 2010, Pages 264-275.
- [34] Y. Bazilevs, V.M. Calo, J.A. Cottrell, J.A. Evans, T.J.R. Hughes, S. Lipton, M.A. Scott and T.W. Sederberg. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**, 5-8, 1, pp 229-263, January 2010
- [35] Huang C.S., Leissa A.W., Chang M.J., Vibrations of skewed cantilevered triangular, trapezoidal and parallelogram Mindlin plates with considering corner stress singularities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **62**, pp.1789-1806, 2005.
- [36] Liew KM, Xiang Y, Kitipornchai S, Wang CM. Vibration of thick skew plates based on Mindlin shear deformation plate theory. *Journal of Sound and Vibration*; **168**, 39-69, 1993.
- [37] McGee OG, Butalia TS. Natural vibrations of shear deformable cantilevered skew thick plates. *Journal of Sound and Vibration*; **176**, 3, 351-376, 1994.
- [38] Shi JW, Nakatani A, Kitagawa H, “Vibration analysis of fully clamped arbitrarily laminated plate”, *Composite Structures*, 63, , pp. 115–122.2004.
- [39] Reddy J.N., Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and analysis. CRC Press LLC ,2004